КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

А.С.ШКУРО

Конспект лекций по математике-2 для студентов Химического института

Учебное пособие

Казань – 2012

УДК 517

Печатается по решению учебно-методической комиссии ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол №9 от 25 мая 2012 г.

заседания кафедры общей математики КФУ
Протокол №9 от 24 мая 2012 г.

Научный редактор
докт. ф.-м. наук, проф. **Н.Г. Гурьянов**

Рецензенты:
докт. ф.-м. наук, проф. **Ю.И. Бутенко,**
канд. ф.-м. наук, доц. **Е.П. Аксентьева**

Шкуро А.С.

Конспект лекций по математике-2 для студентов Химического института: учебное пособие / А.С. Шкуро. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012. – 106 с.

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по математике для студентов химического института, читаемых автором во втором семестре на протяжении ряда последних лет.

Пособие полностью соответствует ныне действующей программе курса математики для студентов-химиков, но может быть использовано студентами и других естественных специальностей, а также заинтересованными школьниками старших классов общеобразовательных школ.

I. Приложения производной

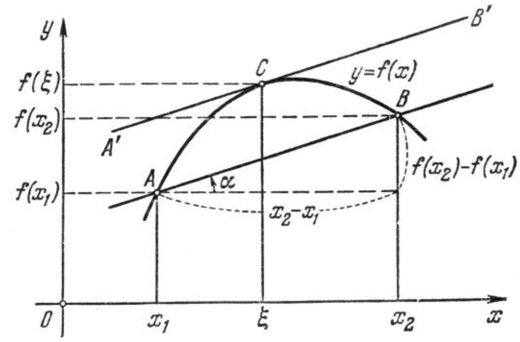
Лекция 1

Теорема Лагранжа о конечных приращениях

Если $f(x)$ – дифференцируемая функция на некотором промежутке $< a, b >$ и x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ - любые значения из этого промежутка, то

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \text{ где } x_1 < \xi < x_2 \qquad (1)$$

Доказательство. На графике функции $y = f(x)$ проведем секущую AB через точки $A(x_1, f(x_1)$ и $B(x_2, f(x_2))$. Будем перемещать эту секущую параллельно начальному положению до тех пор, пока она не превратится в касательную $A'CB'$ к графику нашей функции в некоторой точке его $C\big(\xi, f(\xi)\big)$, где $x_1 < \xi < x_2$. Согласно нашему построению угловой коэффициент секущей AB равен угловому коэффициенту касательной $A'CB'$, поэтому $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)$, откуда получается (1).



Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция есть тождественная постоянная на этом промежутке.

Пусть $f'(x) = 0$ при $a < x < b$. Полагая в (1) $x_1 = x_0$, где x_0 – некоторое фиксированное значение из (a, b), и $x_2 = x$, где x – любое значение из этого интервала, будем иметь

$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0$. Отсюда $f(x) = f(x_0) = Const$, если $a < x < b$.

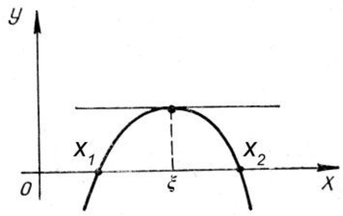
Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то эти функции на рассматриваемом промежутке отличаются друг от друга самое большее на постоянное слагаемое.

Пусть $f'_1(x) = f'_2(x)$ при $x \in < a, b >$. Тогда на этом промежутке имеем $[f_1(x) - f_2(x)]' = f'_1(x) - f'_2(x) = 0$. Следовательно, в силу следствия 1 функция $f_1(x) - f_2(x) = C$ для всех $x \in < a, b >$.

Теорема Ролля о корнях производной

Между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится по меньшей мере один корень ее производной.

Доказательство. Если $f(x)$ - дифференцируемая функция и $f(x_1) = f(x_2) = 0$ $(x_1 < x_2)$, то из формулы (1) имеем



$f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$ или так как $x_2 \neq x_1$, то $f'(\xi) = 0$, где $x_1 < \xi < x_2$.

Замечание 1. Теорема имеет простую геометрическую интерпретацию. Между точками x_1 и x_2 найдется по меньшей мере одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси Ox.

Замечание 2. Теорему можно сформулировать и в более общем виде.

Если $y = f(x)$ - функция, дифференцируемая на $[x_1, x_2]$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то между x_1 и x_2 найдется точка ξ, в которой производная равна нулю, то есть $f'(\xi) = 0$. Действительно, случай $f(x_1) = f(x_2) = 0$ рассмотрен выше; если $f(x_1) \neq 0$, то введем функцию $F(x) = f(x) - f(x_1)$, тогда $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f'(x)$, $F(x_1) = 0$, $F(x_2) = 0$, т.е. для функции $F(x)$ выполнены условия теоремы Ролля. Следовательно, существует точка ξ такая, что $F'(\xi) = 0$, а значит и $f'(\xi) = 0$.

Теорема Коши об отношении конечных приращений двух функций

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ - две дифференцируемые на $[x_1, x_2]$ функции, причем $\varphi'(x)$ нигде внутри отрезка не обращается в нуль, то внутри отрезка $[x_1, x_2]$ найдется такая точка $\xi, x_1 < \xi < x_2$, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

(2)

Доказательство. Определим число Q равенством:

$$Q = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}$$

(3)

Отметим, что $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \neq 0$, т.к. в противном случае $\varphi(x_2)$ равнялось бы $\varphi(x_1)$, и тогда по теореме Ролля производная $\varphi'(x)$ обращалась бы в нуль внутри отрезка, что противоречит условию теоремы. Составим вспомогательную функцию

$F(x) = f(x) - f(x_1) - Q[\varphi(x) - \varphi(x_1)]$. Заметив, что функция $F(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, заключаем, что существует такое значение $x = \xi$ $(x_1 < \xi < x_2)$, что $F'(\xi) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, следовательно,

$F'(\xi) = f'(\xi) - Q\varphi'(\xi) = 0$, откуда $Q = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$. Подставляя значение Q в (3), получим (2).

Замечание. Теорему Коши нельзя доказать, как это может показаться с первого взгляда, применением теоремы Лагранжа к числителю и знаменателю дроби: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}$. Действительно, мы получили бы в этом случае (после сокращения на $x_2 - x_1$) формулу

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)} = \frac{f'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_2)}$, в которой $x_1 < \xi_1 < x_2$, $x_1 < \xi_2 < x_2$. Но так как , вообще говоря, $\xi_1 \neq \xi_2$, то полученный результат, очевидно, не дает еще теоремы Коши.

Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x = a$ этого отрезка, т.е. $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = 0$. Отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не определено при $x = a$, но имеет вполне определенный смысл при значениях $x \neq a$. Следовательно, может быть поставлен вопрос о разыскании предела этого отношения при $x \to a$. Вычисление пределов такого типа называется обычно “раскрытием неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ ". С такого рода задачей мы уже имели дело и раньше, например, при рассмотрении предела $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x}$. Выражение $\frac{sinx}{x}$ при $x = 0$ не имеет смысла, но мы видели, что предел $\frac{sinx}{x}$ при $x \to 0$ существует и равняется 1.

Теорема. (Правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x = a$, т.е. $f(a) = \varphi(a) = 0$; тогда, если существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$, то существует и $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Доказательство. Возьмем на отрезке $[a, b]$ какую-нибудь точку $x \neq a$. Применяя формулу Коши, будем иметь $\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, где ξ лежит между a и x. Но по условию $f(a) = \varphi(a) = 0$, значит $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$. Если $x \to a$, то и $\xi \to a$. Поэтому

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$=$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, и окончательно

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Если $f'(a)=\varphi'(a)=0$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем условиям, которые были наложены в условиях теоремы на функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то применяя правило Лопиталя к отношению $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, приходим к формуле $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и т.д.

В правиле Лопиталя a может быть как конечным числом, так и ∞.

Замечание. Правило Лопиталя можно применять и при раскрытии неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.(Примем это без доказательства).

Раскрытие неопределенностей вида $\mathbf{0}\cdot\infty,\infty-\infty,\mathbf{0^0},\infty^{\mathbf{0}},\mathbf{1}^{\infty}$

1) Пусть $\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$; требуется найти $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]$. Это – неопределенность типа $0\cdot\infty$.

Если искомое выражение переписать в виде $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ или $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, то при $x\to a$ мы получим неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

2) Пусть $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$; требуется найти $\lim_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]$. Это – неопределенность типа $\infty-\infty$. Преобразуем $f(x)-\varphi(x)=f(x)\cdot\left[1-\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]$ и раскроем сначала неопределенность $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ (вида $\frac{\infty}{\infty}$); если $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=1$, то следует привести выражение к виду $\frac{1-\frac{\varphi(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ (неопределенность $\frac{0}{0}$).

3) Неопределенности видов $0^0,\infty^0,1^\infty$ раскрываются с помощью предварительного логарифмирования. Эти неопределенности сводятся к случаю неопределенности $0\cdot\infty$.

Например, пусть $\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$; требуется найти $\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$. Это – неопределенность вида 0^0. Положив $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$, прологарифмируем обе части полученного равенства: $\ln y=\varphi(x)[\ln f(x)]$. При $x\to a$ получим (справа) неопределенность вида $0\cdot\infty$. Найдя $\lim_{x\to a}\ln y$, легко получить $\lim_{x\to a}y$. Действительно, в силу непрерывности логарифмической функции, $\lim_{x\to a}\ln y=\ln\lim_{x\to a}y$, и если $\ln\lim_{x\to a}y=b$, то, очевидно, $\lim_{x\to a}y=e^b$.

Аналогичным приемом раскрываются и неопределенности видов: $\infty^0, 1^\infty$.

В некоторых случаях правило Лопиталя полезно комбинировать с нахождением пределов элементарными способами.

Лекция 2

Исследование функций

Возрастание и убывание функции

Функция $f(x)$ возрастает на $< a, b >$, если любому большему значению аргумента x на этом промежутке соответствует большее значение функции, т.е. из неравенства $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $f(x)$ убывает на $< a, b >$, если любому большему значению аргумента x на этом промежутке соответствует меньшее значение функции, т.е. из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Теорема о необходимом признаке возрастания (убывания) функции

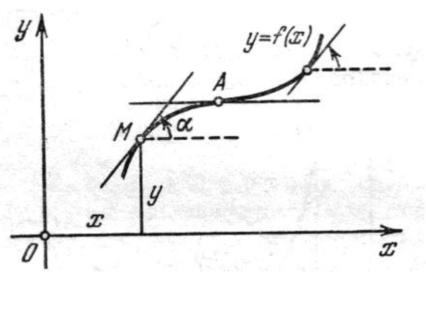
1) Если дифференцируемая функция возрастает на некотором промежутке, то производная этой функции неотрицательна на этом промежутке, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если дифференцируемая функция убывает на некотором промежутке, то ее производная не положительна на этом промежутке; т.е. $f(x) \leq 0$.

Доказательство. 1) Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на $< a, b >$. Согласно определению производной $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Если значения x и $x + \Delta x \in < a, b >$, то в силу возрастания функции $f(x)$ знак ее приращения $f(x + \Delta x) - f(x)$, где $\Delta x \neq 0$, одинаков со знаком приращения Δx аргумента x. Следовательно, при достаточно малом по абсолютной величине Δx имеем: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что предел положительной функции, очевидно, не может быть отрицательным, получим $f'(x) \geq 0$.

2) Доказательство второй части теоремы аналогично доказательству первой части (провести самим!).

Замечание. Геометрически утверждение теоремы сводится к тому, что для графика возрастающей дифференцируемой функции касательные образуют с положительным



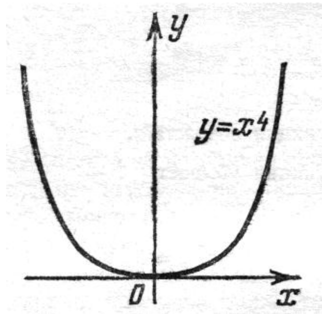
направлением оси Ox острые углы α $(tg\alpha = f'(x))$ или в некоторых точках A параллельны оси Ox. Для графика убывающей дифференцируемой функции все касательные образуют тупые углы с положительным направлением оси Ox или параллельны ей.

Теорема о достаточном признаке возрастания (убывания) функции

1) Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка, то функция возрастает на этом промежутке.

2) Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка, то функция убывает на этом промежутке.

Доказательство. 1) Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ такова, что $f'(x) > 0$ при $a < x < b$. Для любых двух значений x_1 и $x_2, x_1 < x_2, \in [a, b]$, в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где ξ – промежуточное значение между x_1 и x_2 и, следовательно, лежащее в (a, b). так как $x_2 - x_1 > 0$ и $f'(\xi) > 0$, то отсюда получим $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a, b]$.



2) Доказательство второй части этой теоремы совершенно аналогично доказательству первой ее части (провести самим!).

Функция возрастающая или убывающая называется монотонной. Промежутки, в которых данная функция возрастает или убывает, называются промежутками монотонности этой функции.

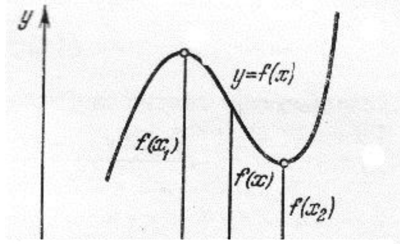
Пример. Определить промежутки монотонности функции $y = x^4$.

Производная равна $y' = 4x^3$; при $x > 0$ имеем $y' > 0$ - функция возрастает; при $x < 0$ имеем $y' < 0$ - функция убывает.

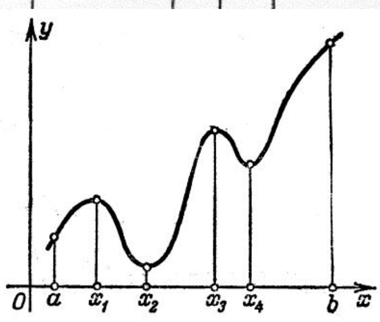
Экстремум функции

При значении x_1 аргумента x функция $f(x)$ имеет максимум $f(x_1)$, если в некоторой окрестности точки x_1, (возможно весьма малой) выполнено неравенство $f(x_1) > f(x)$ $(x \neq x_1)$.

Аналогично, при значении x_2 аргумента x функция $f(x)$ имеет минимум $f(x_2)$, если в некоторой окрестности точки x_2 (возможно весьма малой) имеет место неравенство $f(x_2) < f(x)$ $(x \neq x_1)$.



Максимум или минимум функции называется экстремумом функции (или экстремальным значением функции). А те значения



аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются точками экстремума функции (соответственно: точками максимума или точками минимума функции). Из определения следует, что экстремум функции, вообще говоря, имеет локальный характер - это наибольшее или наименьшее значение функции по сравнению с близлежащими значениями ее. Минимум функции может быть больше максимума - подобно тому, как впадина в горах может иметь бо́льшую отметку над уровнем моря, чем небольшая вершина. На рисунке при $x = x_1$ и $x = x_3$ - максимумы, при $x = x_2$ и $x = x_4$ - минимумы. Минимум при $x = x_4$ больше максимума при $x = x_1$. Из определения максимума и минимума следует: 1) Функция, определенная на отрезке, может достигать максимума и минимума только при значениях x, заключенных внутри рассматриваемого отрезка. 2) Максимум и минимум функции могут быть, а могут и не быть наибольшим и наименьшим значениями функции на рассматриваемом отрезке. На рисунке наибольшее значение функция принимает в точке $x = b$, а наименьшее в точке $x = x_2$.

Теорема о необходимом условии экстремума функции

В точке экстремума дифференцируемой функции производная этой функции равна нулю.

Доказательство. Пусть для определенности x_0 есть точка минимума функции $f(x)$. Следовательно, $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, если $\Delta x \neq 0$ достаточно мало по абсолютной величине. Отсюда

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} > 0, \text{ если } \Delta x > 0,$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} < 0, \text{ если } \Delta x < 0.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

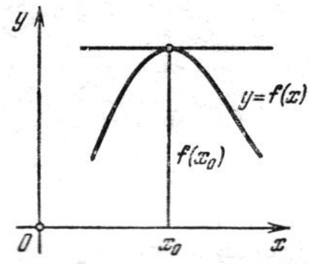
$$f'(x_0) \geq 0, \text{ если } \Delta x > 0,$$

$$f'(x_0) \leq 0, \text{ если } \Delta x < 0.$$

Так как значение производной $f'(x_0)$ не должно зависеть от способа стремления Δx к нулю, то отсюда следует , что $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана. Аналогичным образом теорема доказывается и для случая максимума функции (доказать самим).

Геометрически условие $f'(x_0) = 0$ обозначает, что в точке $(x_0, f(x_0))$

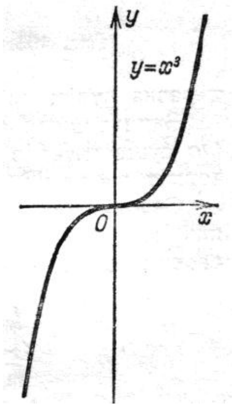
касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox.



Следствие из теоремы.

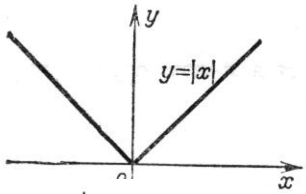
Если при всех рассматриваемых значениях аргумента x функция $f(x)$ имеет производную, то она может иметь экстремум только при тех значениях, при которых производная обращается в нуль.

Обратное заключение неверно: не при всяком значении, при котором производная обращается в нуль, обязательно существует экстремум. Например, функция $y = x^3$ при $x = 0$ имеет производную, равную нулю: $(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0$, но в этой точке функция не имеет экстремума $(f(0) = 0,\ f(x) < 0 \text{ при } x < 0,\ f(x) > 0 \text{ при } x > 0)$.

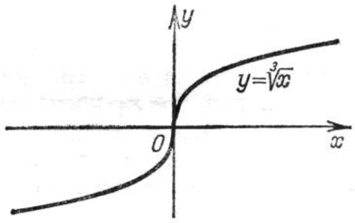


Мы исследовали случай, когда функция во всех точках некоторого отрезка имеет производную. Покажем сейчас на примерах, что в точках, где производная не существует, может быть или максимум, или минимум, но может и не быть ни того, ни другого.

Пример 1. Функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, но в этой точке данная функция имеет минимум: $y = 0 \text{ при } x = 0$, тогда как для всякой точки x, отличной от нуля, имеем $y > 0$.



Пример 2. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ не имеет производной при $x = 0$ $(y' \to \infty \text{ при } x \to 0)$. В этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума: $f(0) = 0;\ f(x) < 0 \text{ для } x < 0,\ f(x) > 0 \text{ для } x > 0$.



Таким образом, функция может иметь экстремум лишь в двух случаях: либо в тех точках, где производная существует и равна нулю; либо в тех точках, где производная не существует.

Те значения аргумента x, которые для данной функции $f(x)$ обращают в нуль ее производную $f'(x)$ или для которых производная $f'(x)$ не существует, называются критическими значениями аргумента или критическими точками первого рода.

Теорема 1 о достаточных условиях существования экстремума

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку первого рода x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме быть может, самой точки x_1). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_1$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_1 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Таким образом, если $a)\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ при } x < x_1, \\ f'(x) < 0 \text{ при } x > x_1, \end{cases}$

то в точке x_1 функция имеет максимум;

если $b)\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ при } x < x_1, \\ f'(x) > 0 \text{ при } x > x_1, \end{cases}$

то в точке x_1 функция имеет минимум.

При этом надо иметь ввиду, что условия $a)$ и $b)$ должны выполняться для всех значений x, достаточно близких к x_1, т.е. во всех точках некоторой достаточно малой окрестности критической точки x_1.

Доказательство. Предположим сначала, что производная меняет знак с плюса на минус, т.е. выполняются условия $a)$. Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_1)$, получим

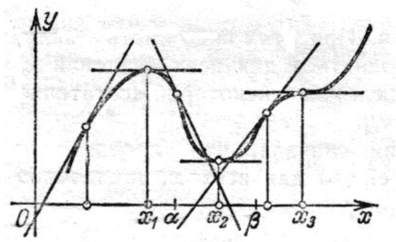
$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1)$, где ξ есть точка, лежащая между x и x_1.

1) Пусть $x < x_1$; тогда $\xi < x_1$, $f'(\xi) > 0$, $f'(\xi)(x - x_1) < 0$ и, следовательно, $f(x) - f(x_1) < 0$, или $f(x) < f(x_1)$ (1)

2) Пусть $x > x_1$; тогда $\xi > x_1$, $f'(\xi) < 0$, $f'(\xi)(x - x_1) < 0$ и, следовательно, $f(x) - f(x_1) < 0$, или $f(x) < f(x_1)$ (2)

(1) и (2) показывают, что для всех значений x, достаточно близких к x_1, значения функции меньше, чем значения функции в точке x_1. Следовательно в точке x_1 функция $f(x)$ имеет максимум.

Аналогичным образом доказывается вторая часть теоремы о достаточных условиях минимума.



Проиллюстрируем смысл теоремы 1 на рисунке. В точке x_1 $f'(x_1) = 0$ и для x, достаточно близких к x_1, выполняется условие $a)$, значит в точке x_1 - максимум. В точке x_2 $f'(x_2) = 0$ и для x, достаточно близких к x_2, выполняется условие $b)$, значит в точке x_2 - минимум. В точке x_3 $f'(x_3) = 0$ и для всех значений x, достаточно близких к x_3, выполняются неравенства

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ при } x < x_3 \\ f'(x) > 0 \text{ при } x > x_3. \end{cases}$$

Значит функция возрастает как при $x < x_3$, так и при $x > x_3$. Следовательно при $x = x_3$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Теорема 2 о достаточных условиях существования экстремума

Если для дифференцируемой функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 ее первая производная $f'(x)$ равна нулю, а вторая производная $f''(x)$

существует и отлична от нуля, т.е. $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0,$ то в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно:

1) если $f''(x_0)>0,$ то $f(x_0)$ - минимум функции $f(x),$ и

2) если $f''(x_0)<0,$ то $f(x_0)$ - максимум функции $f(x).$

Доказательство. 1) Пусть $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0.$ Пусть $x=x_0+\Delta x$ - точка, близкая к x_0. Так как $f''(x)$ есть производная от $f'(x)$, то $f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}$ (здесь мы воспользовались тем, что $f'(x_0)=0$). Таким образом, переменная величина $\frac{f'(x)}{x-x_0}$ стремится к пределу $f''(x_0)\neq 0,$ а значит в некоторой окрестности точки x_0 эта величина имеет знак своего предела (на основании теоремы о сохранении знака функции), т.е. в нашем случае знак плюс. Поэтому $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$ при $|x-x_0|<\varepsilon\ (x\neq x_0)$. Отсюда получаем, что числитель и знаменатель дроби $\frac{f'(x)}{x-x_0}$ имеют одинаковые знаки и, следовательно, $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$.

Мы видим, что производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак с минуса на плюс. На основании теоремы 1 число $f(x_0)$ есть минимум функции $f(x)$.

2) Аналогично доказывается, что если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0,$ то $f(x_0)$ - максимум функции $f(x)$.

Для запоминания связи между знаком второй производной и максимумом и минимумом функции можно использовать так называемое "правило дождя".

Лекция 3

Вогнутость и выпуклость графика функции

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется вогнутым в промежутке $<a,b>$, если соответствующая часть кривой $y=f(x)$ расположена выше всех касательных, проведенных в любых ее точках.

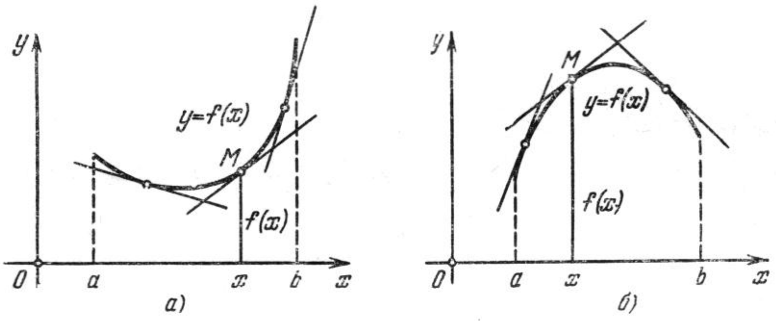


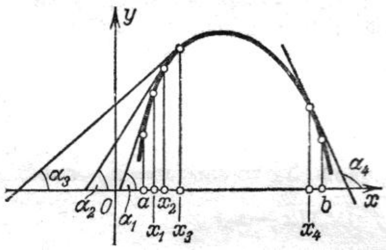
График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется выпуклым в промежутке $<a,b>,$ если соответствующая часть кривой

$y = f(x)$ расположена ниже всех касательных, проведенных в любых ее точках.

Теорема о необходимом условии выпуклости (вогнутости) графика функции

1) Если графиком дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ на (a, b) является выпуклая кривая, то $f''(x) \leq 0$ на (a, b).

2) Если графиком дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ на (a, b) является вогнутая кривая, то $f''(x) \geq 0$ на (a, b).



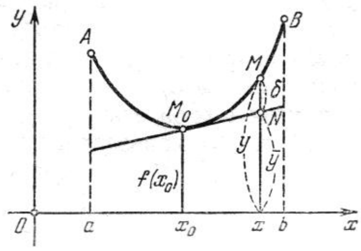
Доказательство. 1) $f''(x) = (f'(x))'$. Примем за функцию $f'(x)$, а за ее производную $f''(x)$. Так как кривая $y = f(x)$ на (a, b) выпукла, то $f'(x)$ на (a, b) убывает, а необходимым условием ее убывания мы уже знаем является то, что ее производная $f''(x) \leq 0$ на (a, b). Что и требовалось доказать.

2)Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема о достаточном условии вогнутости (выпуклости) графика функции

1) Если для дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ $f''(x) > 0$ на (a, b), то график этой функции будет вогнутым в данном промежутке.

2) Если же $f''(x) < 0$ на $< a, b >$, то график функции $y = f(x)$ будет выпуклым в этом промежутке.



Доказательство. 1) Пусть $f''(x) > 0$ при $a < x < b$ и x_0 - любая точка (a, b). Сравним в точке x ординату y кривой $y = f(x)$ с ординатой $\bar{y}$ ее касательной M_0N, проведенной в точке $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$. Так как угловой коэффициент касательной M_0N равен $f'(x_0)$, то $\overline{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Отсюда $\delta = y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Используя теорему Лагранжа, будем иметь $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi)$, где ξ - точка, лежащая между x_0 и x. Поэтому $\delta = (x - x_0)\big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)$.

Так как $f''(x) = (f'(x))' > 0$, то $f'(x)$ - возрастающая функция.

Пусть $x < x_0$; тогда $\xi < x_0$ и в силу возрастания $f'(x)$ имеем $f'(\xi) < f'(x_0)$. В этом случае получаем $\delta > 0$.

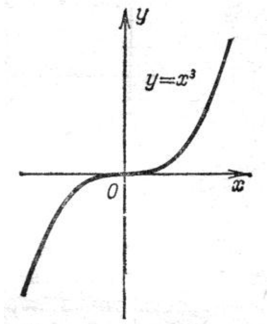
Если теперь $x > x_0$ то $\xi > x_0$ и $f'(\xi) > f'(x_0)$. Снова $\delta > 0$.

Таким образом, при $x \neq x_0$ имеем $\delta = y - \overline{y} > 0$, т.е. $y > \overline{y}$.

Отсюда вытекает, что при $a < x < b$ кривая $y = f(x)$ расположена выше своих касательных и, значит, график функции $y = f(x)$ будет вогнутым на $< a, b >$.

2) Аналогично доказывается, что если $f''(x) < 0$ при $a < x < b$, то график функции $y = f(x)$ будет выпуклым на $< a, b >$.

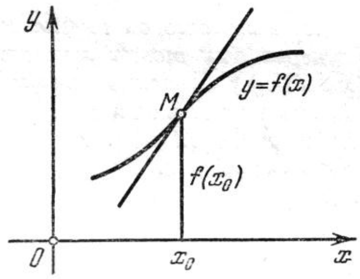
Здесь снова действует "правило дождя".



Пример. $y = x^3$. Установить интервалы выпуклости и вогнутости.

$y' = 3x^2$, $y'' = 6x$. $y'' < 0$ при $x < 0$, $y'' > 0$ при $x > 0$, следовательно, при $x < 0$ кривая выпукла, а при $x > 0$ - вогнута.

Точки перегиба



Точкой перегиба графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется его точка, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот.

Теорема о необходимом признаке точки перегиба

Если x_0 - абсцисса точки перегиба графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Доказательство. Мы определили точку перегиба, как такую точку графика, которая отделяет выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой. Из доказанной выше теоремы о необходимом условии вогнутости (выпуклости) графика функции следует, что с одной стороны от точки x_0 $(f'(x))' \geq 0$, а с другой $(f'(x))' \leq 0$; таким образом, точка x_0 разделяет два интервала монотонности функции $f'(x)$, следовательно, она является точкой экстремума для функции $f'(x)$. Применяя теорему о необходимом условии экстремума функции, получаем, что если x_0 – абсцисса точки перегиба, то $(f'(x))'_{x=x_0} = f''(x_0)$ либо равняется нулю, либо не существует.

Те точки x, в которых $f''(x) = 0$ или не существует, называются критическими точками второго рода для функции $f(x)$. Критическая точка второго рода не обязательно должна быть абсциссой точки перегиба, но только среди критических точек второго рода надо искать абсциссы точек перегиба.

Теорема о достаточном признаке точки перегиба

Если для функции $y = f(x)$ вторая производная ее $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в нуль или не существует и при переходе через эту точку меняет свой знак на обратный, то точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Доказательство. 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда при $x < x_0$ кривая выпукла, а при $x > x_0$ - вогнута. Следовательно, точка $M(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба.

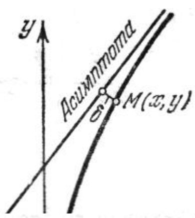
2) Если $f''(x) > 0$ при $x < x_0$, и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то при $x < x_0$ кривая вогнута, а при $x > x_0$ – выпукла. Следовательно, точка $M(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба.

Обратим внимание на разницу в характере терминов: точкой экстремума функции называется точка на оси независимой переменной, а точкой перегиба – точка самого графика. Это связано с тем, что понятие экстремума относительное, зависящее от выбранной системы координат: точка на линии, соответствующая точке экстремума, например, точке максимума, - вершина в одной системе координат может не быть вершиной в какой-нибудь другой системе координат; определение же точки перегиба не зависит от системы координат.

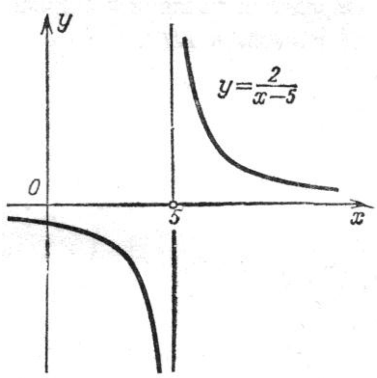
Лекция 4

Асимптоты

Очень часто приходится исследовать форму кривой $y = f(x)$ при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой или абсциссы и ординаты одновременно. При этом важным частным случаем является тот, когда исследуемая кривая при удалении ее переменной точки в бесконечность (т.е. когда расстояние этой точки от начала координат неограниченно возрастает) неограниченно приближается к некоторой прямой.



Прямая A называется асимптотой кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю. Асимптоты бывают вертикальные и наклонные.



Вертикальные асимптоты

Из определения асимптоты следует, что если $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или

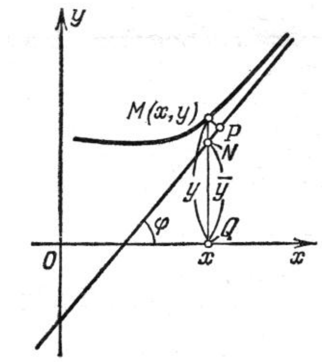
$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ есть асимптота кривой $y = f(x)$, и обратно, если прямая $x = a$ есть асимптота, то выполняется одно из написанных равенств.

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот нужно найти такие значения $x = a$, при приближении к которым функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности. Тогда прямая $x = a$ будет вертикальной асимптотой.

Пример. Кривая $y = \frac{2}{x-5}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 5$, т.к. $y \to \infty$ при $x \to 5$.

Наклонные асимптоты

Наклонных асимптот у кривой $y = f(x)$ может быть две – правая и левая. Пусть кривая $y = f(x)$ имеет правую наклонную асимптоту $\overline{y} = k_1 x + b_1$ (1). Определим k_1 и b_1. По условию $\lim_{x\to+\infty} MP = 0$ (2)



$NM = \frac{MP}{cos\varphi}$. Так как $\varphi = const$, то $\lim_{x\to+\infty} NM = 0$ (2').

Но $NM = |y - \overline{y}| = |f(x) - (k_1 x + b_1)| = 0$ (3).

Выносся x за скобки, получим $\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k_1 - \frac{b_1}{x}\right] = 0$.

Так как $x \to +\infty$, то должно выполняться $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k_1 - \frac{b_1}{x}\right] = 0$.

При $b_1 = Const$ получим $\lim_{x\to+\infty} \frac{b_1}{x} = 0$.

Следовательно, $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k_1\right] = 0$ или $k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ (4)

Зная k_1, из (3) находим $b_1 = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - k_1 x]$ (5)

Если хотя бы один из пределов (4) или (5) не существует, то кривая не имеет правой асимптоты.

Аналогично ищется левая асимптота $y = k_2 x + b_2$, где k_2 и b_2 находятся по формулам $k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b_2 = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - k_2 x]$.

Если хотя бы один из этих пределов не существует, то кривая не имеет левой асимптоты.

Пример полного исследования функции и построения графика.

$$y = e^{-x^2} \quad \text{(кривая Гаусса)}$$

1) Область определения функции $x \in (-\infty, +\infty)$.

2) Пределы $f(x)$ при $x \to$ к концам интрвалов из которых состоит область определения функции $\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$.

3) $y' = -2xe^{-x^2}$, $-2xe^{-x^2} = 0$, критическая точка первого рода $x_1 = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	-
y	↗	$y_{max} = 1$	↘

4) $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, $2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$, критические точки второго рода $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

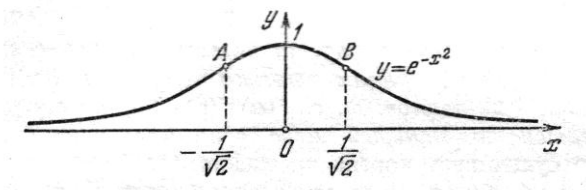
x	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	$y_{\text{пер}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cap$	$y_{\text{пер}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cup$

Точки перегиба: $A(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ и $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

5) Вертикальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты.

$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = 0$, $b_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$,

$y = 0$ – наклонная асимптота (одновременно и правая, и левая).



6) Точка пересечения с осями координат $(0,1)$.

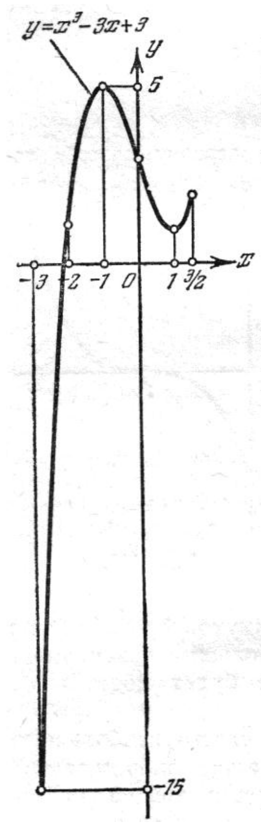
7) Функция четная.

На основании проведенного исследования легко построить график кривой.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает наибольшего значения. Будем предполагать, что на данном отрезке функция $f(x)$ имеет конечное число критических точек первого рода. Если наибольшее значение достигается внутри отрезка $[a, b]$, то, очевидно, что это значение будет одним из максимумов функции (если имеется несколько максимумов), а именно, наибольшим максимумом. Но может случиться, что наибольшее значение будет достигаться на одном из концов отрезка. То же самое можно сказать и о наименьшем значении функции: оно достигается либо на одном из концов данного отрезка, либо в такой внутренней точке, которая является точкой наименьшего минимума.

Таким образом, если требуется найти наибольшее значение непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, то надо: найти все максимумы функции на отрезке, определить значения функции на концах отрезка и из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее. Аналогичным образом следует поступать и при определении наименьшего значения функции на отрезке.



Пример. Определить на отрезке $[-3; 1{,}5]$ наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 3$.

$y' = 3x^2 - 3$, $3x^2 - 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$,

$y'' = 6x$, $(y'')_{x=1} = 6 > 0$, следовательно, в точке $x = 1$ минимум $(y)_{x=1} = 1$; $(y'')_{x=-1} = -6 < 0$, следовательно, в точке $x = -1$ максимум $(y)_{x=-1} = 5$. Определяем значения функции на концах отрезка: $(y)_{x=1,5} = \frac{15}{8}$, $(y)_{x=-3} = -15$.

Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой функции на $[-3; 1{,}5]$ $(y)_{x=-1} = 5$; наименьшее значение $(y)_{x=-3} = -15$.

Лекция 5.

Формула Тейлора

Формула, которую мы сегодня получим, является одной из основных формул математического анализа и имеет многочисленные приложения как в анализе, так и в смежных дисциплинах.

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $(n+1) - \text{го}$ порядка включительно в некотором промежутке, содержащем точку $x = a$. Найдем многочлен $y = P_n(x)$ степени не выше n, значение которого в точке $x = a$ равняется значению функции $f(x)$ в этой точке, а значения его производных до $n - \text{го}$ порядка в точке $x = a$ равняются значениям соответствующих производных от функции $f(x)$ в этой точке.

$P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), \cdots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$ (1)

Естественно ожидать, что такой многочлен в некотором смысле “близок” к функции $f(x)$.

Будем искать этот многочлен в форме многочлена по степеням $(x - a)$ с неопределенными коэффициентами.

$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n.$ (2)

Неопределенные коэффициенты $C_0, C_1, \cdots, C_n$ определим так, чтобы удовлетворялись условия (1).

Предварительно найдем производные от $P_n(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \cdots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x) = 2\cdot 1C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \cdots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad P_n^{(n)}(x) = n!\,C_n. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Подставляя в левые и правые части равенств (2) и (3) вместо x значение a и заменяя на основании равенств (1) $P_n(a)$ через $f(a)$, $P_n'(a)$ через $f'(a)$ и т.д., получим:

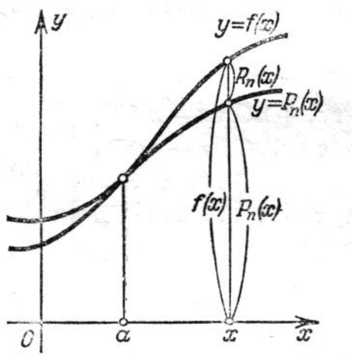
$f(a) = C_0, f'(a) = C_1, f''(a) = 2!\,C_2, \cdots, f^{(n)}(a) = n!\,C_n$, откуда находим

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = f(a), C_1 = \frac{f'(a)}{1!}, C_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \\ \quad C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \cdots, C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Подставляя найденные значения $C_0, C_1, \cdots, C_n$ в (2), получим:

$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. (5)

Обозначим через $R_n(x)$ разность значений данной функции $f(x)$ и построенного многочлена $P_n(x)$; тогда будем иметь:



$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. (6)

$R_n(x)$ называется остаточным членом. Для тех значений x, для которых остаточный член $R_n(x)$ мал, многочлен $P_n(x)$ дает приближенное представление функции $f(x)$.

Остаточный член обычно записывают в так называемой форме Лагранжа: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, (7), где $0 < \theta < 1$.

Подставив (5) и (7) в (6), получим формулу Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (8)$$

Если в формуле Тейлора положить $a = 0$, то получим формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (9)$$

Разложение по формуле Маклорена функций $e^x, sinx, cosx, ln(1+x), (a+x)^n$

1. Разложение функции $f(x) = e^x$.

$f(x) = e^x, \qquad f(0) = 1,$

$f'(x) = e^x, \qquad f'(0) = 1,$

$\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots$

$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad f^{(n)}(0) = 1,$

$f^{(n+1)}(x) = e^x, \qquad f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}.$

Подставляя в (9), будем иметь:

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$

Доказано, что $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при $-\infty < x < +\infty$.

А значит, что при любом x, взяв достаточное число членов, мы можем вычислить e^x с любой степенью точности.

2. Разложение функции $f(x) = sinx$.

$f(x) = sinx, \qquad f(0) = 0,$

$f'(x) = cosx = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 1,$

$f''(x) = -sinx = sin(x + 2\frac{\pi}{2}), \qquad f''(0) = 0,$

$f'''(x) = -cosx = sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0) = -1,$

$f^{(4)}(x) = sinx = sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(4)}(0) = 0,$

…………………………………………………………………………………..

$f^{(n)}(x) = sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = sin\frac{n\pi}{2},$

$f^{(n+1)}(x) = sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n+1)}(\theta x) = sin\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$

Подставляя в (9), получим:

$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{sin\frac{n\pi}{2}x^n}{n!} + \frac{\sin(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2})x^{n+1}}{(n+1)!}, \ 0 < \theta < 1.$

Доказано, что $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при $-\infty < x < +\infty$.

3. Разложение функции $f(x) = cosx$.

Действуя аналогично предыдущему, получим:

$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{cos\frac{n\pi}{2}x^n}{n!} + \frac{\cos(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2})x^{n+1}}{(n+1)!}, \ 0 < \theta < 1.$

Здесь также $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при $-\infty < x < +\infty$.

4. Разложение функции $f(x) = \ln(1+x)$.

$f(x) = \ln(1+x)$, $\quad f(0) = 0$,

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\quad f'(0) = 1$,

$f''(x) = -\dfrac{1!}{(1+x)^2}$, $\quad f''(0) = -1$,

$f'''(x) = \dfrac{2!}{(1+x)^3}$, $\quad f'''(0) = 2!$,

……………………………………………………………………………………

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, $\quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$,

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$, $\quad f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^n\dfrac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$.

Подставляя в (9), будем иметь:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при $-1 < x \le 1$.

5. Разложение функции $f(x) = (a+x)^n$.

$f(x) = (a+x)^n$, $\quad f(0) = a^n$,

$f'(x) = n(a+x)^{n-1}$, $\quad f'(0) = na^{n-1}$,

$f''(x) = n(n-1)(a+x)^{n-2}$, $\quad f''(0) = n(n-1)a^{n-2}$,

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3}$, $\quad f'''(0) = n(n-1)(n-2)a^{n-3}$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$f^{(n)}(x) = n!$, $\quad f^{(n)}(0) = n!$,

$f^{(n+1)}(x) = 0$, $\quad f^{(n+1)}(\theta x) = 0$.

Подставляя в (9), получим:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots + nax^{n-1} + x^n.$$

Это равенство называется формулой бинома Ньютона.

Лекция 6.

Дифференциал

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Производная этой функции в некоторой точке x отрезка $[a,b]$ определяется равенством $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Умножая все члены последнего равенства на Δx, получим: $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$. $\quad (1)$

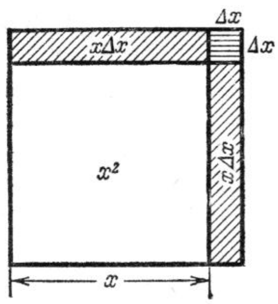
Так как в общем случае $f'(x) \neq 0$, то при постоянном x и переменном $\Delta\, x \to 0$ произведение $f'(x)\,\Delta\, x$ есть бесконечно малая величина первого порядка малости относительно $\Delta\, x$. Произведение же $\alpha\,\Delta\, x$ есть всегда величина бесконечно малая высшего порядка малости относительно $\Delta\, x$, так как $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$.

Таким образом, приращение $\Delta\, y$ функции состоит из двух слагаемых, из которых первое слагаемое есть (при $f'(x) \neq 0$) так называемая главная часть приращения, линейная относительно $\Delta\, x$. Эту главную часть приращения называют дифференциалом функции в точке x, соответствующим приращению аргумента $\Delta\, x$. Принято обозначать дифференциал функции $y = f(x)$ символом dy или $df(x)$.

Итак, $dy = f'(x)\,\Delta\, x$. $\quad (2)$

В случае $f'(x) = 0$ слагаемое $f'(x)\,\Delta\, x$ перестает быть главной частью приращения $\Delta\, y$ дифференцируемой функции (ибо это слагаемое равно нулю в то время, как слагаемое $\alpha\,\Delta\, x$, вообще говоря, отлично от нуля). Однако, договариваются и в случае $f'(x) = 0$ определять дифференциал функции формулой (2), т.е. считают, что он равен нулю в этом случае.

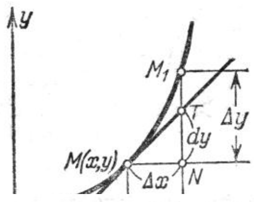
Пример. Пусть функция $y = x^2$ есть площадь квадрата, сторона которого равна x. Если стороне x дать приращение $\Delta\, x$, то новое ее значение станет $x +\Delta\, x$ и, следовательно, площадь y квадрата получит приращение $\Delta\, y = (x +\Delta\, x)^2 - x^2$ или $\Delta\, y = 2x\,\Delta\, x + (\Delta\, x)^2$; поэтому $dy = 2x\,\Delta\, x$. На рисунке приращение $\Delta\, y$ функции y изображается площадью всей заштрихованной части, тогда как дифференциал dy функции изображается площадью заштрихованной части без площади маленького квадрата, находящегося в правом верхнем углу большого квадрата.

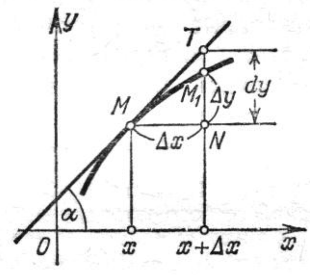


Введем понятие дифференциала независимой переменной. Под дифференциалом независимой переменной понимается дифференциал функции, тождественной с независимой переменной, т.е. функции $y = x$. Поэтому $dx =\Delta\, x$. Тогда $dy = f'(x)dx \quad (3)$;

откуда $\frac{dy}{dx} = y'$.

Геометрический смысл дифференциала. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть $M(x, y)$ и $M'(x +\Delta\, x, y +\Delta\, y)$ - две точки данной кривой. В точке M проведем касательную MT к графику функции и рассмотрим ΔMTN с катетами $MN =\Delta\, x$ и $NT =\Delta$





$xtg\varphi$, но из геометрического смысла производной следует $tg\varphi = f'(x) = y'$, поэтому $NT = y' \Delta x = dy$. Т.о. дифференциал функции $y = f(x)$ в данной точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в точке с абсциссой x, когда x получает приращение Δx.

Если график функции вогнут, то $\Delta y > dy$, если же график функции выпукл, то $\Delta y < dy$.

Физическое значение дифференциала. Пусть известен закон движения точки M по оси Ox: $x = f(t)$, где x - расстояние точки M от начала отсчета O и t -время, причем будем предполагать, что точка M движется в одном и том же направлении. За бесконечно малый промежуток времени dt точка M переместится в точку M', пройдя при этом путь $\Delta x = f(t + dt) - f(t)$. Это есть истинное приращение пути. Дифференциал пути dx согласно формуле (3) равен $dx = x'_t dt$. Но x'_t есть скорость движения v в момент времени t; поэтому $dx = vdt$. Таким образом, дифференциал пути равен тому фиктивному приращению пути, которое получится, если предположить, что начиная с данного момента времени, точка движется равномерно, сохраняя приобретенную скорость.

Например, если спидометр автомобиля показывает $60\ ^{\text{км}}/_{\text{час}}$, то шофёр, рассчитывая, что за 1мин пробег машины составит 1км, фактически вычисляет не приращение пути за 1мин (которое вследствие неравномерности движения может быть не равно 1км), а дифференциал пути.

Приближенное вычисление малых приращений функции

Если Δx мало по абсолютной величине, то для дифференцируемой функции $f(x)$ ее приращение $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ отличается от дифференциала $df(x) = f'(x) \Delta x$ на величину бесконечно малую относительно Δx. Отсюда имеем приближенное равенство:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x. \quad (4)$$

Пример. Найти $\sqrt[3]{1{,}1}$.

Полагая в формуле (4): $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, будем иметь $\sqrt[3]{1{,}1} \approx \sqrt[3]{1} + 0{,}1 \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = 1 + 0{,}1 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}033$.

По таблицам же находим $\sqrt[3]{1{,}1} = 1{,}032$.

Рассмотрим еще одну задачу, важную для приближенных вычислений.

Задача. Для данной функции $y = f(x)$ предельная абсолютная погрешность ее аргумента x равна Δ_x, т.е. $|\Delta x| \le \Delta_x$. Каковы предельные абсолютная Δ_y и относительная δ_y погрешности функции y ?

Из формулы (4) имеем $|\Delta y| \approx |y'||\Delta x|$; следовательно, при $y' \ne 0$, можно принять $\Delta_y = |y'|\Delta_x$ (5) и $\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = |(lny)'|\Delta_x$.

Пример. Угол $x = 60^\circ$ определен с точностью до 1°. Как отразится это обстоятельство на синусе угла?

Здесь $\Delta_x = arc1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx \frac{1}{57}$. Поэтому ошибка для $y = sinx$ на основании формулы (5), где $y' = cosx$, может достигать величины

$\Delta_y = cos60^\circ \cdot \Delta_x \approx \frac{1}{114} \approx 0{,}01$; $\quad \delta_y = \frac{1}{57 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}0002$.

Свойства дифференциалов

Задача нахождения дифференциала функции равносильна нахождению производной, так как умножив последнюю на дифференциал аргумента, получим дифференциал функции. Следовательно, большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняют силу и для дифференциалов.

1.Дифференциал постоянной равен нулю.

Полагая в формуле (3) $y = C$ и $y' = 0$, получим $dC = 0$.

2. Дифференциал алгебраической суммы нескольких дифференцируемых функций равен алгебраической сумме дифференциалов этих функций.

$$(u + v - w)' = u' + v' - w' \,|dx$$
$$(u + v - w)'dx = u'dx + v'dx - w'dx$$
$$d(u + v - w) = du + dv - dw.$$

3. Если две дифференцируемые функции отличаются на постоянное слагаемое, то дифференциалы их равны между собой.

$d(u + C) = du + dC = du$; $\quad d(u + C) = du$.

4. Постоянный множитель может быть вынесен за знак дифференциала.

$(Cu)' = Cu' \,|dx$; $\quad (Cu)'dx = C(u'dx)$; $\quad d(Cu) = Cdu$.

5. Дифференциал произведения.

$$(uv)' = uv' + vu' \,|dx$$
$$d(uv) = udv + vdu.$$

6. Дифференциал частного.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad |dx$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

7. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

Пусть $y = f[\varphi(x)]$. Положим $\varphi(x) = u$ и, следовательно, $y = f(u)$. Если $f(u)$ и $\varphi(x)$ - дифференцируемые функции, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad |dx$$
$$y'_x dx = y'_u \cdot (u'_x dx) \text{ или } dy = y'_u du.$$

Из последней формулы следует такое свойство дифференциала.

8. Инвариантность формы первого дифференциала.

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента, при этом безразлично, будет ли этот аргумент независимой переменной или дифференцируемой функцией от другой независимой переменной.

На основе формул для производных, можно получить соответствующие формулы для дифференциалов.

Например, $du^\alpha = \alpha u^{\alpha-1}du$, $dsinu = cosudu$ и т.д.

Дифференциалы высших порядков

Пусть x - независимая переменная и $y = f(x)$ есть дифференцируемая функция.

$$df(x) = f'(x)dx, \quad (*)$$

Таким образом, $df(x)$ - функция от x и dx.

В дальнейшем будем предполагать, что dx имеет произвольное , но фиксированное значение, независящее от независимой переменной x и одно и то же для всех рассматриваемых функций. Если dx фиксировано, то $df(x)$ есть некоторая функция от x, пропорциональная $f'(x)$, с коэффициентом пропорциональности, равным dx. Может случиться, что эта функция также имеет дифференциал (для этого достаточно, чтобы существовала $f''(x)$); в таком случае последний называется дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) функции $f(x)$, а дифференциал, определяемый формулой $(*)$, носит более точное название дифференциала первого порядка (или первого дифференциала). Итак, дифференциалом второго порядка $d^2f(x)$ функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е. $d^2f(x) = d[df(x)]$. Аналогично вводится дифференциал третьего порядка $d^3f(x) = d[d^2f(x)]$. Так последовательно определяются дифференциалы высших порядков.

Выведем теперь формулу для дифференциала второго порядка.

$df(x) = f'(x)dx$; $d^2f(x) = d[f'(x)dx]$.

Если x - независимая переменная, то dx не зависит от x, т.е. dx по отношению к переменной x играет роль постоянной. Поэтому

$$d^2f(x) = dxd[f'(x)] = dx[f'(x)]'dx = f''(x)dx^2.$$

Итак, $d^2f(x) = f''(x)dx^2$.

Полагая $f(x) = y$, можно написать $d^2y = y''dx^2$ или $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Если x - независимая переменная, то по аналогии

$d^3f(x) = f'''(x)dx^3$, $d^4f(x) = f^{(4)}(x)dx^4$ и т.д.

Если x - зависимая переменная, то dx не является постоянной по отношению к x, поэтому

$$d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d^2x$$
$$= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

II.Неопределенный интеграл

Лекция 7.

Первообразная и неопределенный интеграл

До сих пор мы рассматривали такую задачу: дана функция $F(x)$; требуется найти ее производную, т.е. функцию $f(x) = F'(x)$.

Теперь мы будем рассматривать обратную задачу: дана функция $f(x)$; требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример. Найти первообразную от функции $f(x) = x^2$.

Из определения первообразной следует, что функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной,т.к. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$. Легко видеть, что если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Так в рассматриваемом примере можно было взять в качестве первообразных следующие функции:

$F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $F(x) = \frac{x^3}{3} - 5$ или вообще $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (где C - произвольная постоянная), т.к. $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

С другой стороны, можно доказать, что функциями вида $\frac{x^3}{3}+C$ исчерпываются все первообразные от функции x^2. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то разность между ними равна постоянному числу.

Доказательство. Имеем: $\begin{cases} F_1'(x)=f(x) \\ F_2'(x)=f(x) \end{cases}$ (1)

при любом значении x на отрезке $[a,b]$.

Обозначим: $F_1(x)-F_2(x)=\varphi(x)$ (2)

Тогда на основании (1) будет:

$F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$

или $\varphi'(x)=[F_1(x)-F_2(x)]'=0$ при любом значении x на отрезке $[a,b]$. Но из равенства $\varphi'(x)=0$ следует, что $\varphi(x)$ есть постоянная. Обозначая эту постоянную через C, из (2) получаем $F_1(x)-F_2(x)=C$

Из доказанной теоремы следует, что если для данной функции $f(x)$ найдена какая-нибудь одна первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$, где $C-const$.

Определение 2. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Иначе, неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных.

Таким образом, по определению

$\int f(x)dx=F(x)+C$, если $F'(x)=f(x)$.

При этом функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, знак ∫ - знаком интеграла.

Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой семейство функций $y=F(x)+C$. С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет семейство кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз, т.е. вдоль оси Oy.

Первообразные (а значит и неопределенный интеграл) существуют не для всякой функции $f(x)$. Заметим однако, без доказательства, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для этой функции существует первообразная (а значит и неопределенный интеграл).

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если $F'(x) = f(x)$, то и

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x) \qquad (3)$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \qquad (4)$$

Это следует из (3).

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = F(x) + C \qquad (5)$$

Справедливость проверяется дифференцированием.

В формулах (4) и (5) знаки d и $\int$, следующие друг за другом в том или другом порядке, взаимно уничтожают друг друга (если не учитывать постоянного слагаемого). В этом смысле дифференцирование и интегрирование и являются взаимно обратными математическими операциями.

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \qquad (6)$$

Для доказательства найдем производные от левой и правой частей этого равенства и убедимся, что они равны между собой. Следовательно, левая часть от правой может отличаться лишь на постоянное слагаемое. В этом смысле и надо понимать равенство (6).

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \qquad (7)$$

Найдем производные от левой и правой частей и увидим, что они равны. Следовательно, левая часть от правой может отличаться лишь на постоянное слагаемое.

Таблица неопределенных интегралов

Непосредственно из определения и таблицы производных вытекает таблица интегралов.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$
3. $\int sinxdx = -cosx + C$
4. $\int cosxdx = sinx + C$
5. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$

6. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$

7. $\int tgxdx = -ln|cosx| + C$

8. $\int ctgxdx = ln|sinx| + C$f9. $\int e^x dx = e^x + C$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -arccos\frac{x}{a} + C$

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента. Непосредственное интегрирование

В таблице неопределенных интегралов предполагалось, что x есть независимая переменная. Однако, эта таблица полностью сохраняет свое значение, если под x понимать любую дифференцируемую функцию от независимой переменной.

В самом деле, пусть x есть независимая переменная, $f(x)$ - некоторая непрерывная функция на данном промежутке и $F(x)$ – ее первообразная, т.е. $F'(x) = f(x)$. Имеем

$$F(x) + C = \int f(x)dx, \quad F'(x) = f(x) \quad (1).$$

Пусть $u = \varphi(x)$ - дифференцируемая функция x. В силу инвариантности формы первого дифференциала

$dF(u) = F'(u)du = f(u)du, \quad F'(u) = f(u),$ откуда

$F(u) + C = \int f(u)du, \quad F'(u) = f(u) \quad (2).$

Итак, из справедливости формулы (1) следует справедливость формулы (2), которая получается из первой формулы формальной заменой x на u. На основании этого свойства получаем обобщенную таблицу простейших интегралов:

$$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$$

$$\int sinudu = -cosu + C$$ и т.д.,

где u -любая дифференцируемая функция x.

Пример. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.

Заменяя x на $sinx$, получим:

$\int sinxd(sinx) = \frac{sin^2x}{2} + C$,

$\int sinxcosxdx = \frac{sin^2x}{2} + C$.

Отсюда становится понятной важность умения приводить данное дифференциальное выражение $f(x)dx$ к виду: $f(x)dx = g(u)du$, где u есть некоторая функция от x и g - функция более простая для интегрирования, чем f.

Отметим ряд преобразований дифференциала, полезных для дальнейшего:

1) $dx = d(x + b)$, где b - постоянная величина

2) $dx = \frac{1}{a}d(ax)$, где постоянная $a \neq 0$

3) $dx = \frac{1}{a}d(ax + b)$, $\quad (a \neq 0)$

4) $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$

5) $sinxdx = -d(cosx)$

Вообще $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$.

Пользуясь этими преобразованиями дифференциалов, найдем некоторые неопределенные интегралы. Такой способ интегрирования называется непосредственным интегрированием.

Пример 1. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}ln|ax + b| + C$

Пример 2. $\int sin5xdx = \frac{1}{5}\int sin5xd(5x) = -\frac{1}{5}cos5x + C$

Пример 3. $\int tgxdx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = -\int \frac{d(cosx)}{cosx} = -ln|cosx| + C$.

Лекция 8.

Основные методы интегрирования

Для вычисления данного интеграла мы должны, если это возможно, пользуясь теми или иными способами, привести его к табличным интегралам и таким образом найти искомый результат. Рассмотрим основные методы интегрирования.

1. Метод разложения.

Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Тогда на основании четвертого свойства неопределенного интеграла имеем $\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

По возможности слагаемые $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стараются подобрать так, чтобы интегралы от них находились непосредственно.

Пример 1. $\int\left(1-\sqrt{x}\right)^2dx=\int\left(1-2\sqrt{x}+x\right)dx=$

$$\int dx-2\int\sqrt{x}dx+\int xdx=x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C.$$

Нет надобности после каждого слагаемого ставить произвольную постоянную, потому что сумма произвольных постоянных есть также произвольная постоянная, которую мы пишем в конце.

Пример 2. $\int tg^2xdx=\int\left(\frac{1}{cos^2x}-1\right)dx=tgx-x+C.$

Пример 3. $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx+\int\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx=$

$$-\frac{1}{x}+arctgx+C.$$

2.Метод подстановки.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив $x=\varphi(t)$, (1)

где $\varphi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$; докажем, что в этом случае имеет место следующее равенство:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

Здесь подразумевается, что после интегрирования в правой части равенства вместо t будет подставлено его выражение через x на основании равенства (1). Для того, чтобы установить, что выражения, стоящие в формуле (2) справа и слева, равны с точностью до произвольной постоянной, нужно доказать, что их производные по x равны между собой.

Находим производную от левой части: $\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x).$

Правую часть равенства (2) будем дифференцировать по x как сложную функцию, где t - промежуточный аргумент. Зависимость t от x выражается равенством (1), при этом $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ и по правилу дифференцирования обратной функции $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}$. Таким образом, имеем:

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t\frac{dt}{dx}=$$

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=f(x).$$

Что и требовалось доказать.

Функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства (2). Иногда целесообразнее подбирать замену переменного не в виде $x = \varphi(t)$, а $t = \psi(x)$.

Пример 1. $\int \sqrt{sinx} cosxdx$

Сделаем подстановку $t = sinx$; тогда $dt = cosxdx$ и, следовательно,

$\int \sqrt{sinx} cosxdx = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} sin^{\frac{3}{2}} x + C.$

Пример 2. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

Сделаем подстановку $x = asint$; $dx = acostdt$; тогда

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \frac{1 + cos2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} sin2t + C =$$

$$\frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} sint \sqrt{1 - sin^2 t} + C = \frac{a^2}{2} arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C =$$

$\frac{a^2}{2} arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

3. Метод интегрирования по частям.

Пусть u и v - две дифференцируемые функции от x. Тогда, как известно, дифференциал произведения uv вычисляется по следующей формуле: $d(uv) = udv + vdu$.

Отсюда, интегрируя, получаем: $uv = \int udv + \int vdu$ или

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (1)$$

Это формула интегрирования по частям.

Выведенная формула показывает, что $\int udv$ приводится к $\int vdu$, который может оказаться более простым, чем исходный, или даже табличным. Умение разбивать разумным образом данное подынтегральное выражение на множители u и dv вырабатывается в процессе решения задач. Сейчас же можно лишь сказать, что в качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv - оставшаяся часть подынтегрального выражения, включая dx.

Пример. $\int xsinxdx$

$$u = x, \quad dv = sinxdx, \quad du = dx, \quad v = -cosx$$

$$\int xsinxdx = -xcosx + \int cosxdx = -xcosx + sinx + C.$$

При определении функции v по дифференциалу dv мы можем брать любую произвольную постоянную, так как в конечный результат она не входит, что легко проверить, подставив в равенство (1) вместо v выражение $v + C$. Поэтому удобно считать эту постоянную равной нулю.

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях. Так, например, интегралы вида $\int x^k sinaxdx$, $\int x^k cosaxdx$, $\int x^k e^{ax}dx$, $\int x^k lnxdx$, некоторые интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции, вычисляются с помощью интегрирования по частям.

В некоторых случаях для сведения данного интеграла к табличному формула интегрирования по частям применяется несколько раз.

Иногда искомый интеграл определяется из алгебраического уравнения, получающегося с помощью интегрирования по частям.

Пример. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$

$$u=\sqrt{x^2-a^2},\ dv=dx,\qquad du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}},\ \ v=x$$

$$I=\int\sqrt{x^2-a^2}dx=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=$$

$$x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$I=x\sqrt{x^2-a^2}-I-a^2ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

Аналогичным образом можно вычислить следующие два интеграла.

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C,$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Лекция 9.

Комплексные числа и операции над ними

Определение 1. Два действительных числа a и b называются упорядоченной парой, если указано, какое из чисел первое, а какое второе. Обозначение: (a,b) -a -первый элемент, b - второй.

Определение 2. Комплексным числом z называется упорядоченная пара (a,b): $z=(a,b)$ - первый элемент которой называется действительной частью, а второй элемент - мнимой частью этого числа: $Rez=a$, $Imz=b$. Всякую пару $(a,0)$ мы будем отождествлять с действительным числом: $(a,0)=a$, так что все действительные числа есть подмножество всего множества комплексных чисел.

Определение 3. Два комплексных числа $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ равны между собою $(z_1=z_2)$, если $Rez_1=Rez_2$, $Imz_1=Imz_2$. При этом комплексное число z считается равным нулю, если $Rez = Imz = 0$; т.е. $(0,0) = 0$.

Определение 4. Суммой двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и обозначается так $z = z_1 + z_2$.

Определение 5. Произведением комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$ и обозначается так $z = z_1 \cdot z_2$.

Совершенно очевидным является выполнение следующих свойств относительно сложения и умножения:

$a)$ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $b)$ $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $c)$ $z + 0 = z$, $d)$ для любого $z = (a, b)$ имеется $z' = (-a, -b)$, что $z + z' = 0$, $\alpha)$ $z_1z_2 = z_2z_1$, $\beta)$ $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$, $\gamma)$ $z \cdot (1,0) = z$, $\delta)$ для любого $z \neq 0$ существует обратное $\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$, что $z\left(\frac{1}{z}\right) = 1$, $\varepsilon)$ $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

Определение 6. Разностью чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ назовем число $z = (x, y)$, которое в сумме с z_2 дает z_1: $z_2 + z = z_1$ или $z = z_1 - z_2$. Видим, что $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$.

Определение 7. Частным комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$, где $z_2 \neq 0$, назовем такое число z (и напишем $z = \frac{z_1}{z_2}$), которое, будучи умножено на z_2, даст z_1. Установим его вид. Пусть $z = (x, y)$, где x и y пока неизвестны. Исходя из определения, имеем $(a_2x - b_2y, a_2y + b_2x) = (a_1, b_1)$ или $\begin{cases} a_2x - b_2y = a_1 \\ b_2x + a_2y = b_1 \end{cases}$, $\Delta = a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. Решая, находим $z = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{a_2b_1-b_2a_1}{a_2^2+b_2^2}\right)$.

В операциях с комплексными числами особую роль играет число $(0,1)$, обозначаемое символом i: $i = (0,1)$. Очевидно $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$. После этого любое комплексное число $z = (a, b)$ можно представить в виде:

$z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0,1) = a + bi$ - получим **алгебраическую форму** комплексного числа, а операции умножения, сложения, деления, вычитания проводить по обычным законам, известным из теории действительных чисел. Например,

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1),$$

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\,\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2},$$

т.е. то, что мы уже имели раньше.

Определение 8. Комплексное число $\bar{z} = a - ib$ называется сопряженным к числу $z = a + ib$. Их произведение $z\bar{z} = a^2 + b^2$ - действительное число.

Геометрическая интерпретация.

Комплексное число $z = x + iy$ будем изображать точкой $M(x, y)$ с прямоугольными координатами x и y. Ось абсцисс называется действительной осью, ось ординат - мнимой осью. Очевидно, что нами установлено взаимно-однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством всех точек плоскости, которая называется комплексной плоскостью. Вследствие этого в дальнейшем мы не будем делать различия в терминах "комплексное число z", "точка z".

Введем на нашей плоскости полярную систему координат

$$\begin{cases} x = rcos\varphi, & 0 \le r < \infty, \\ y = rsin\varphi, & -\infty < \varphi < \infty. \end{cases}$$

Так что $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$. Получили **тригонометрическую форму** комплексного числа z. Положительное число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z| = r$. Угол φ называется аргументом комплексного числа и обозначается $\varphi = Argz$. Очевидно, если комплексное число задано (в алгебраической форме), то его аргумент однозначно не определен, а лишь с точностью до слагаемого $2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \cdots)$. Поэтому вводят в рассмотрение главное значение аргумента: $argz$ - это то значение угла φ, которое заключено в пределах одного оборота: $-\pi < argz \le \pi$. Тогда $Argz = argz + 2k\pi$.

Равенство комплексных чисел z_1 и z_2 в тригонометрической форме выглядит так (точки на плоскости совпадают!): $|z_1| = |z_2|$ и $argz_1 = argz_2$ (или $Argz_1 = Argz_2 + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

Условие сопряженности комплексных чисел (которые изображаются симметричными относительно действительной оси точками) такое:

$|z| = |\bar{z}|,\ \ argz = -arg\bar{z}\ \ (z \ne -\pi)$.

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме:

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$.

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)$.

Возвышение в *n-ю* степень (*n* – целое положительное число):

$z^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi)$.

Извлечение корня *n-ой* степени.

Число w называется корнем *n-ой* степени из комплексного числа z, если $w^n = z$. Пишем так: $w = \sqrt[n]{z}$.

Если $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$, $w = \rho(cos\psi + isin\psi)$ (ρ и ψ нам пока неизвестны), то $\rho^n = r$, $n\psi = \varphi + 2k\pi$ или $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$. (*)

Полагая $k = 0,1,\cdots,n-1$, получим $\psi_0 = \frac{\varphi}{n}$, $\psi_1 = \frac{\varphi+2\pi}{n},\cdots,\psi_{n-1} = \frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}$. Если далее положить $k = n$, то получим $\psi_n = \psi_0 + 2\pi$. Видно, что все остальные ψ_k получаются из написанных путем прибавления слагаемых, кратных 2π. Так что (*) определяет n различных значений $\sqrt[n]{z}$:

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi}{n} + isin\frac{\varphi}{n}\right),\cdots,$$
$$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}\right).$$

Эти точки делят окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ на n равных частей.

Пример. Найти все значения $\sqrt[3]{1}$.

$1 = cos0 + isin0$, $\sqrt[3]{1} = cos\frac{o+2k\pi}{3} + isin\frac{0+2k\pi}{3}$.

Полагая $k = 1,2,3$, находим три значения корня:

$x_1 = cos0 + isin0 = 1$, $x_2 = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x_3 = cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Лекция 10.

Многочлены

Разложение многочлена на множители

Функция $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n$,

где n - целое положительное число, называется многочленом (полиномом) или целой рациональной функцией от x; число n называется степенью многочлена. Коэффициенты $A_0, A_1, \cdots, A_n$ - действительные или комплексные числа; независимая переменная x также может принимать как действительные, так и комплексные значения. Корнем многочлена называется такое значение переменного x, при котором многочлен обращается в нуль.

Теорема 1 (теорема Безу). При делении многочлена $f(x)$ на разность $x - a$ получается остаток, равный $f(a)$.

Доказательство. Наш многочлен по степеням x с помощью формулы Тейлора представим в виде многочлена по степеням $(x - a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$f(a) + (x-a)f_1(x),$$

где $f_1(x)$ - многочлен степени $n-1$. Полученное соотношение доказывает теорему.

Следствие. Если a есть корень многочлена, т.е. $f(a)=0$, то $f(x)$ делится без остатка на $x-a$ и, следовательно, представляется в виде произведения $f(x)=(x-a)f_1(x)$, где $f_1(x)$ - многочлен степени $n-1$.

Теорема 2 (основная теорема алгебры). Всякая целая рациональная функция $f(x)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Примем без доказательства (доказывается в высшей алгебре).

Теорема 3. Всякий многочлен $n-ой$ степени разлагается на n линейных множителей вида $x-a$ и множитель, равный коэффициенту при x^n.

Доказательство. Пусть $f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n$.

Этот многочлен в силу основной теоремы алгебры имеет по крайней мере один корень; обозначим его через a_1. Тогда на основании следствия из теоремы Безу мы можем написать:

$$f(x)=(x-a_1)f_1(x),$$

где $f_1(x)$ - многочлен $(n-1)-ой$ степени; $f_1(x)$ также имеет корень. Обозначим его через a_2. Тогда

$$f_1(x)=(x-a_2)f_2(x),$$

где $f_2(x)$ – многочлен $(n-2)-ой$ степени. Аналогично

$$f_2(x)=(x-a_3)f_3(x).$$

Продолжая этот процесс выделения линейных множителей, дойдем до соотношения

$$f_{n-1}(x)=(x-a_n)f_n,$$

где f_n – многочлен нулевой степени, т.е. некоторое фиксированное число. Это число, очевидно, равно коэффициенту при x^n, т.е. $f_n=A_0$.

На основании полученных равенств можем написать

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n). \qquad (1)$$

Из разложения (2) следует, что числа $a_1,a_2,\cdots,a_n$ есть корни многочлена $f(x)$, т.к. при подстановке $x=a_1, x=a_2,\cdots,x=a_n$ правая часть, а следовательно, и левая, обращается в нуль.

Никакое значение $x=a$, отличное от $a_1,a_2,\cdots,a_n$, не может быть корнем многочлена $f(x)$, т.к. ни один из множителей в правой части равенства (1) не обращается в нуль при $(x=a)$. Отсюда следует, что многочлен $n-ой$ степени не может иметь более чем n различных корней.

Теорема 4. Если значения двух многочленов n $-ой$ степени $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают при $n+1$ различных значениях $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ аргумента x, то эти многочлены тождественны.

Доказательство. Обозначим $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. По условию $f(x)$ есть многочлен степени не выше n, обращающийся в нуль в точках $a_1, \cdots, a_n$. Следовательно, его можно представить в виде

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

Но, по условию, $f(x)$ обращается в нуль также в точке a_0. Тогда $f(a_0) = 0$ и при этом ни один из линейных множителей не равен нулю, откуда следует, что $A_0 = 0$, а значит $f(x) \equiv 0$. Следовательно, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$, или $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Теорема 5. Если многочлен

$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n$

тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Доказательство.

Запишем разложение этого многочлена по формуле (1):

$$f(x) = A_0(x - a_1) \cdots (x - a_n).$$

Если этот многочлен тождественно равен нулю, то он равен нулю и при некотором значении x, отличном от $a_1, \cdots, a_n$. Но тогда ни одна из скобок $x - a_1, \cdots, x - a_n$ не равна нулю и, следовательно, $A_0 = 0$. Аналогично доказывается, что $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ и т.д.

Теорема 6. Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Это следует из того, что разность данных многочленов есть многочлен, тождественно равный нулю. Следовательно, на основании предыдущей теоремы все его коэффициенты – нули.

Пример. $ax^3 + bx^2 + cx + d = x^2 + 1$

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad c = 0, \qquad d = 1.$$

О кратных корнях многочлена

Если в разложении многочлена n $-ой$ степени

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \qquad (1)$$

некоторые линейные множители окажутся одинаковыми, то их можно объединить, и тогда разложение многочлена на множители будет иметь вид:

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_m)^{k_m}. \qquad (2)$$

При этом $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

В этом случае корень a_1 называется корнем кратности k_1, a_2 $-$ корнем кратности k_2 и т.д.

Если многочлен имеет корень a кратности k, то мы будем считать, что многочлен имеет k одинаковых корней. Тогда из теоремы о разложении многочлена на линейные множители получается следующая теорема: Всякий многочлен $n-ой$ степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители в случае комплексных корней

Раньше мы видели, что в результате операций сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел получается снова комплексное число.

Вернувшись к определениям суммы, разности, произведения и частного комплексных чисел, легко проверить, что если в этих выражениях заменить каждое комплексное число сопряженным, то и результаты указанных действий заменяются сопряженными числами (проверить самим !).

Отсюда вытекает следующая теорема 7:

Если в многочлен с действительными коэффициентами

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n$$

подставить вместо x число $a+ib$, а затем сопряженное число $a-ib$, то и результаты этих подстановок будут взаимно сопряженными.

Теорема 8. Если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет и сопряженный корень $a-ib$.

Доказательство. $f(a+ib) = M + iN$,

где M и N —выражения, не содержащие i.

Так как $a+ib$ —корень многочлена, то

$$f(a+ib) = M + iN = 0, \text{ откуда } M = 0,\ N = 0.$$

$$f(a-ib) = M - iN \text{ (на основании теоремы 7).}$$

Так как $M = 0$, $N = 0$, то $f(a-ib) = 0$, т.е. $a-ib$ —корень многочлена.

Итак, в разложении (1) комплексные корни входят попарно сопряженными.

Перемножив линейные множители, соответствующие паре комплексно сопряженных корней , получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами:

$$[x-(a+ib)][x-(a-ib)] = [(x-a)-ib][(x-a)+ib] =$$
$$(x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ − действительные числа.

Если число $a+ib$ является корнем кратности k, то сопряженное число $a-ib$ должно являться корнем той же кратности k, так что наряду с линейными множителями $x-(a+ib)$ в разложение многочлена входят столько же линейных множителей вида $x-(a-ib)$.

Таким образом, многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители с действительными коэффициентами первой и второй степени соответствующей кратности,т.е.

$$f(x)=A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_r)^{k_r}\cdot$$
$$(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}.$$

При этом $k_1+k_2+\cdots+k_r+2l_1+\cdots+2l_s=n$.

Лекция 11.

Интегрирование рациональных функций

Рациональные функции бывают целыми (многочлены) и дробными (отношение двух многочленов).

Неопределенный интеграл от целой рациональной функции (многочлена) находится непосредственно:

$$\int(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_{n-1}x+A_n)dx=$$
$$A_0\int x^n dx+A_1\int x^{n-1}dx+\cdots+A_{n-1}\int xdx+A_n\int dx.$$

Дробную рациональную функцию (рациональную дробь) будем задавать так:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n}.$$

Не ограничивая общности рассуждения, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней. Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется правильной, в противном случае дробь называется неправильной. Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)},$$

здесь $M(x)$ —многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ —правильная дробь.

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании правильных рациональных дробей.

Существует четыре типа простейших правильных рациональных дробей:

1. $\frac{A}{x-a}$,

2. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k −целое положительное число ≥ 2),

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т.е. $\frac{p^2}{4}-q<0$),

4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k −целое положительное число ≥ 2, $\frac{p^2}{4}-q<0$).

Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших правильных рациональных дробей. Поэтому мы рассмотрим сначала интегралы от простейших дробей.

Интегрирование простейших дробей типа 1, 2 и 3 не представляет большой трудности.

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = Aln|x-a| + C.$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C.$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} +$
$\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}ln|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} =$
$\frac{A}{2}ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$
$\frac{A}{2}ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей 4 типа.

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx =$
$\frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$

Первый интеграл вычисляется просто:
$\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{(x^2+px+q)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + C.$

Второй интеграл обозначим I_k и вычислим отдельно:
$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^k}.$

Обозначим $x+\frac{p}{2}=t;\quad dx=dt,\quad q-\frac{p^2}{4}=m^2$

(корни знаменателя комплексные, следовательно, $q-\frac{p^2}{4}>0$).

$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2+m^2-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt = \frac{1}{m^2}I_{k-1} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k} \quad (1).$

Здесь $I_{k-1} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$

Возьмем последний интеграл в формуле (1) по частям:

$u = t,\ dv = \frac{tdt}{(t^2+m^2)^k},\ \ du = dt,\ \ v = -\frac{1}{2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}$

$\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - I_{k-1}\right].$

Подставляя в (1), получим:

$I_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_{k-1}.$

Это так называемая рекуррентная формула.

Сначала находим $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} arctg \frac{t}{m}$.

Затем, подставляя в рекуррентную формулу $k = 2,$ находим I_2. Далее, подставляя в рекуррентную формулу $k = 3,$ находим I_3. Продолжая этот процесс, находим I_k для любого целого положительного k.

Лекция 12.

Разложение рациональной дроби на простейшие

Пусть нам дана правильная рациональная дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$. Будем предполагать, что коэффициенты входящих в нее многочленов - действительные числа и что данная дробь несократима (числитель и знаменатель не имеют общих корней).

Случай действительных корней знаменателя

Теорема 1. Пусть $x = a$ есть действительный корень знаменателя кратности k, т.е. $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, где $f_1(a) \neq 0$; тогда данную правильную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)}, \qquad (1)$$

где A - постоянная, не равная нулю, а $F_1(x)$ - многочлен, степень которого ниже степени знаменателя $(x-a)^{k-1}f_1(x)$.

Доказательство. Напишем тождество:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x)-Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \qquad (2)$$

(справедливое при любом A) и определим постоянную A так, чтобы многочлен $F(x) - Af_1(x)$ делился на $x - a$. Для этого по теореме Безу необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$F(a) - Af_1(a) = 0$. Так как $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$, то A однозначно определяется равенством: $A = \frac{F(a)}{f_1(a)}$. При таком A будем иметь:

$F(x) - Af_1(x) = (x-a)F_1(x)$, где $F_1(x)$ есть многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x-a)^{k-1}f_1(x)$. Сокращая последнюю дробь в формуле (2) на $(x-a)$, получаем равенство (1).

Следствие. К правильной рациональной дроби $\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)}$, входящей в (1), можно применить аналогичные рассуждения. Таким образом, если знаменатель имеет корень $x = a$ кратности k, то можно написать

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

где $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ - правильная несократимая дробь. К ней также модно применить теорему 1, если $f_1(x)$ имеет другие действительные корни.

Случай комплексных корней знаменателя

Напомним, что комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряжены. В разложении многочлена на действительные множители каждой паре комплексных корней многочлена соответствует выражение вида $x^2 + px + q$. Если же комплексные корни имеют кратность μ, то им соответствует выражение $(x^2 + px + q)^{\mu}$.

Теорема 2. Если $f(x) = (x^2 + px + q)^{\mu}\varphi_1(x)$, где многочлен $\varphi_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$, то правильную рациональную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)}, \qquad (3)$$

где $\Phi_1(x)$ – многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x^2 + px + q)^{\mu-1}\varphi_1(x)$.

Доказательство. Напишем тождество:

$$\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)}, \qquad (4)$$

справедливое при любых M и N, и определим M и N так, чтобы многочлен $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ делился на $x^2 + px + q$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = 0$ имело те же корни $\alpha \pm i\beta$, что и многочлен $x^2 + px + q$. Следовательно,

$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]\varphi_1(\alpha + i\beta) = 0$ или

$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$.

но $\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$ есть определенное комплексное число, которое можно записать в виде $K+iL$, где K и L — некоторые действительные числа.

Таким образом, $M(\alpha+i\beta)+N=K+iL$;

отсюда $M\alpha+N=K, \quad M\beta=L$

или $M=\frac{L}{\beta}, \ \ N=\frac{K\beta-L\alpha}{\beta}$.

При этих значениях коэффициентов M и N многочлен $F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)$ имеет корнем число $\alpha+i\beta$, а, следовательно, и сопряженное число $\alpha-i\beta$. Но в таком случае многочлен без остатка разделится на разности $x-(\alpha+i\beta)$ и $x-(\alpha-i\beta)$, а, следовательно и на их произведение, т.е. на x^2+px+q. Обозначая частное от этого деления через $\Phi_1(x)$, получим:

$$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=(x^2+px+q)\Phi_1.$$

Сокращая последнюю дробь в равенстве (4) на x^2+px+q, получим (3), причем ясно, что степень $\Phi_1(x)$ меньше степени знаменателя. Что и требовалось доказать.

Применяя теперь к правильной дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ результаты теорем 1 и2, мы можем выделить последовательно все простейшие дроби, соответствующие всем корням знаменателя $f(x)$. Таким образом, из предыдущего вытекает следующий результат. Если

$f(x)=(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}\cdots(x^2+lx+s)^{\nu}$,

то дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ может быть представлена в виде:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\cdots+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+$$
$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}+\cdots+ \qquad (5)$$
$$\frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}}+\cdots+\frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.$$

Коэффициенты $A, A_1\cdots$ можно определить из следующих соображений. Написанное равенство есть тождество, поэтому, приведя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителях справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A, A_1,\cdots$. Этот метод нахождения коэффициентов называется методом неопределенных коэффициентов. Наряду с этим для определения коэффициентов можно воспользоваться следующим замечанием: так как многочлены, получившиеся в числителях в правой и левой частях равенства после приведения к общему знаменателю, должны быть тождественно равны, то их значения равны при любых частных значениях x. Придавая x частные значения, получим уравнения для определения коэффициентов. Этот метод нахождения коэффициентов называется методом произвольных значений.

Таким образом, мы видим, что всякая правильная рациональная дробь представляется в виде суммы простейших рациональных дробей. А интегрировать простейшие рациональные дроби мы умеем. Следовательно, мы теперь можем проинтегрировать любую дробную рациональную функцию.

Лекция 13.

Интегралы от иррациональных функций

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. Рассмотрим некоторые иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, до конца интегрируются.

1. Рассмотрим интеграл $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \cdots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx, \qquad (*)$

где R — рациональная функция своих аргументов, т.е. над величинами $x, x^{\frac{m}{n}}, \cdots, x^{\frac{r}{s}}$ производятся только рациональные операции.

Пусть k — общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \cdots, \frac{r}{s}$. Сделаем подстановку: $x = t^k,\ dx = kt^{k-1}dt.$ Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t.

Пример. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}$. Общий знаменатель дробей $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ есть 4, поэтому

$x = t^4, \quad dx = 4t^3dt.$

$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3} t^3 dt.$

2. Рассмотрим интеграл $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx. \qquad (**)$

Этот интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k — общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \cdots, \frac{r}{s}$.

Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальным дифференциалом (или дифференциальным биномом) называют выражение вида $x^m(a+bx^n)^p dx$, где a и b – любые постоянные, а показатели степеней m, n и p – некоторые рациональные числа. Изучим вопрос об интегрируемости в элементарных функциях биномиальных дифференциалов. Отметим три случая, когда интеграл от биномиального дифференциала допускает рационализирующую подстановку.

1. p – целое число. В этом случае биномиальный дифференциал представляет собой иррациональность вида $(*)$, рассмотренную выше. Если через λ обозначить общий знаменатель дробей m и n, то интеграл от биномиального дифференциала в этом случае рационализируется подстановкой $x = t^\lambda$.

2. $\frac{m+1}{n}$ – целое число. В этом случае, сделав подстановку

$$x = z^{\frac{1}{n}},\ dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1},\ x^m = z^{\frac{m}{n}},\ x^m dx = \frac{1}{n} z^{\frac{m+1}{n}-1} dz,$$

будем иметь $\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$ $\quad (***)$

Таким образом, если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то получили иррациональность вида $(**)$, рассмотренную выше. Если через ν обозначить знаменатель рационального числа p, то правая часть выражения $(***)$ рационализируется подстановкой $a + bz = t^\nu$, следовательно, интеграл от биномиального дифференциала в этом случае рационализируется подстановкой $a + bx^n = t^\nu$.

3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число. Интеграл $(***)$ перепишем еще так:

$$\frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{\frac{m+1}{n}+p-1} dz. \qquad (****)$$

Таким образом, если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, то получили снова иррациональность вида $(**)$. Если ν – попрежнему знаменатель рационального числа p, то интеграл $(****)$ рационализируется подстановкой $\frac{a+bz}{z} = t^\nu$, следовательно, интеграл от биномиального дифференциала в этом случае рационализируется подстановкой:

$\frac{a}{x^n} + b = t^\nu$. Итак, интеграл от биномиального дифференциала допускает рационализирующую подстановку, если оказывается целым одно из чисел: p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$.

Эти случаи интегрируемости известны были еще Ньютону. Однако, лишь в середине XIX столетия Чебышев установил замечательный факт, что других случаев интегрируемости в элементарных функциях для биномиальных дифференциалов нет.

Пример. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$

Здесь: $m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{1}{4},\ p = \frac{1}{3};$ т.к. $\frac{m+1}{n} = 2,$ то имеем второй случай интегрируемости. Заметив, что знаменатель p равен $\nu = 3$, положим

$1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3;\ \ x = (t^3-1)^4;\ \ \ dx = 12t^2(t^3-1)^3dt.$

$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = 12\int (t^6 - t^3)dt.$

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ $\quad (1)$
(подстановки Эйлера)

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

1. Первая подстановка Эйлера.

Если $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t.$

Перед $\sqrt{a}$ для определенности возьмем знак +.

$$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2;\qquad x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t};$$

dx также будет выражаться рационально через t.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t = \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t,$$

т.е. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ оказывается рациональной функцией от t.

Так как $\sqrt{ax^2+bx+c},$ x и dx выражаются рационально через t, то, следовательно, данный интеграл (1) преобразуется в интеграл от рациональной функции от t.

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}},\quad a = 1 > 0.$ Полагаем $\sqrt{x^2+k} = -x + t,$

$$x^2 + k = x^2 - 2xt + t^2,\quad x = \frac{t^2-k}{2t},\quad dx = \frac{t^2+k}{2t^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+k} = -x + t = -\frac{t^2-k}{2t} + t = \frac{t^2+k}{2t},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C.$$

2. Вторая подстановка Эйлера.

Если $c > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}.$

Перед $\sqrt{c}$ для определенности возьмем знак +.

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c,$$

$$ax+b=xt^2+2t\sqrt{c},\quad x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоже выражаются рационально через t, то, подставляя значения x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и dx в (1), сведем этот интеграл к интегралу от рациональной функции от t.

3. Третья подстановка Эйлера.

Пусть α и β − действительные корни трехчлена ax^2+bx+c.

Полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$.

Так как $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$, то

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t,\quad a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2,$$

$$ax-a\beta=xt^2-\alpha t^2,\qquad x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

Так как x, dx, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ рационально зависят от t, то данный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции от t.

Эта подстановка Эйлера применима как для $a>0$, так и для $a<0$ − лишь бы многочлен ax^2+bx+c имел два действительных корня.

Лекция 14.

Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

Интеграл вида $\int R(sinx, cosx)dx$ $\qquad(1)$

Этот интеграл с помощью подстановки $tg\frac{x}{2}=t$ $\quad(2)$

всегда сводится к интегралу от рациональной функции.

$$sinx=\frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$cosx=\frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Далее, $x=2arctgt$, $\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Таким образом, $sinx$, $cosx$ и dx выразились рационально через t. Подставляя полученные выражения в (1), получим интеграл от рациональной функции.

Пример. $\int\frac{dx}{sinx}=\int\frac{dt}{t}=ln|t|+C=ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$.

Рассмотренная подстановка дает возможность проинтегрировать всякую функцию вида $R(sinx, cosx)$. Поэтому ее называют "универсальной тригономнтрической подстановкой". Однако, на практике она часто приводит к слишком сложным рациональным функциям.

Поэтому наряду с "универсальной" подстановкой бывает полезно знать также другие подстановки, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели.

1) Если интеграл имеет вид $\int R(sinx)cosxdx$, то подстановка $sinx = t, cosxdx = dt$ приводит этот интеграл к виду $\int R(t)dt$.

2) Если интеграл имеет вид $\int R(cosx)sinxdx$, то подстановка $cosx = t,\ sinxdx = -dt$ приводит его к виду $-\int R(t)dt$.

3) Если интеграл имеет вид $\int R(tgx)dx$, то подстановка $tgx = t$, $x = arctgt,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$ приводит его к виду $\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$.

4) Если интеграл имеет вид (1), но $sinx$ и $cosx$ входят только в четных степенях, то применяется подстановка $tgx = t$, т.к. sin^2x и cos^2x выражаются рационально через tgx: $cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x} = \frac{1}{1+t^2}$, $sin^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x} = \frac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. После подстановки получим интеграл от рациональной функции.

5) Пусть интеграл имеет вид $\int sin^mxcos^nxdx$, где m и n —целые числа. Рассмотрим три случая.

a) m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число. Допустим для определенности, что n нечетное. Положим $n = 2p + 1$.

$\int sin^mxcos^{2p+1}xdx = \int sin^mx(1 - sin^2x)^pcosxdx$.

Сделаем замену $sinx = t,\ cosxdx = dt$.

$\int sin^mxcos^nxdx = \int t^m(1 - t^2)^pdt$.

б) m и n — числа неотрицательные и четные.

Положим $m = 2p,\ n = 2q$.

$$sin^2x = \frac{1-cos2x}{2},\ cos^2x = \frac{1+cos2x}{2},\ sinxcosx = \frac{1}{2}sin2x \qquad (3)$$

$$\int sin^{2p}cos^{2q}xdx = \int \left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^p \left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим члены, содержащие $cos2x$ в нечетных и четных степенях. Члены с нечетными степенями интегрируются , как указано в случае a). Четные показатели степеней снова понижаем по формулам (3). Продолжая так, дойдем до членов вида $\int coskxdx$, которые легко интегрируются.

в) m и n —числа четные, причем хотя бы одно из них отрицательно.

В этом случае предыдущий прием не проходит и приходится поступать как в пункте 4), т.е. делать подстановку $tgx = t$ или $ctgx = t$.

6) Рассмотрим интегралы вида: $\int cosmxcosnxdx$, $\int sinmxcosnxdx$, $\int sinmxsinnxdx$.

Они берутся при помощи следующих формул $(m \neq n)$:

$cosmxcosnx = \frac{1}{2}[cos(m+n)x + cos(m-n)x]$,

$sinmxcosnx = \frac{1}{2}[sin(m+n)x + sin(m-n)x]$,

$sinmxsinnx = \frac{1}{2}[-cos(m+n)x + cos(m-n)x]$.

Подставляя и интегрируя, получим

$\int cosmxcosnxdx = \dfrac{1}{2}\int [cos(m+n)x + cos(m-n)x]dx =$

$\frac{sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{sin(m-n)x}{2(m-n)} + C$.

Аналогично вычисляются и два других интеграла.

Интеграл вида $\int \boldsymbol{R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx}$ $\quad (\mathbf{1})$
(тригонометрические подстановки)

Предполагается, что $a \neq 0$ и $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$.

Покажем метод преобразования этого интеграла к интегралу вида

$$\int \bar{R}(sinz, cosz)dz, \qquad (2)$$

который был рассмотрен нами.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Сделаем замену: $x + \frac{b}{2a} = t$; $dx = dt$.

Тогда $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}$.

Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть $a > 0, c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Введем обозначения $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$.
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2+n^2}.$$
2. Пусть $a > 0, c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Тогда $a = m^2, c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$.
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2-n^2}.$$
3. Пусть $a < 0, c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Тогда $a = -m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$.
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{n^2-m^2t^2}.$$
4. Пусть $a < 0, c - \frac{b^2}{4a} < 0$. В этом случае $\sqrt{ax^2+bx+c}$ есть комплексное число при любом значении x.

Таким образом, интеграл (1) преобразуется к одному из следующих типов.

$$I. \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2+n^2}\right)dt,$$
$$II. \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2-n^2}\right)dt,$$
$$III. \int R\left(t, \sqrt{n^2-m^2t^2}\right)dt.$$

Интеграл I типа приводится к интегралу вида (2) с помощью подстановки $t = \frac{n}{m} tgz$.

Для интеграла II типа нужно применить подстановку $t = \frac{n}{mcosz}$.

А в интеграле III типа следует сделать подстановку $t = \frac{n}{m} sinz$.

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. Это интеграл III типа. Делаем подстановку $x = asinz,\ \ dx = acoszdz$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \int \frac{acoszdz}{\sqrt{(a^2-a^2sin^2z)^3}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{cos^2z} = \frac{1}{a^2}tgz + C =$$
$$\frac{1}{a^2}\frac{sinz}{\sqrt{1-sin^2z}} + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции

Мы уже отмечали, что всякая функция $f(x)$, непрерывная на интервале (a, b), имеет на этом интервале первообразную. Однако, не всякая первообразная, даже тогда, когда она существует, выражается в конечном виде через элементарные функции.

Таковы, например, первообразные, выраженные интегралами:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \ \int \frac{sinx}{x}dx,\ \ \int \frac{cosx}{x}dx,\ \ \int \sqrt{1-k^2sin^2x}dx,\ \ \int \frac{dx}{lnx}.$$

Во всех подобных случаях первообразная представляет собой, очевидно, некоторую новую функцию, которая не сводится к комбинации конечного числа элементарных функций. Эти новые функции стали называть специальными функциями. Такова, например, функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. Она встретится в теории вероятностей, которая будет изучаться в третьем семестре. Для многих специальных функций составлены таблицы значений при различных значениях x.

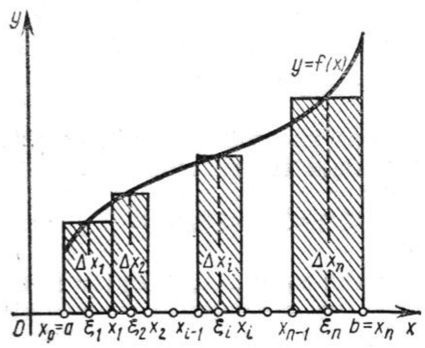
III.Определенный интеграл

Лекция 15.

Определенный интеграл – одно из основных понятий современной математики. К этому понятию приводят, например, задачи о площади криволинейной трапеции и о вычислении длины пути по заданной скорости.

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть на $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Попытаемся вычислить площадь криволинейной трапеции –



фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, снизу – осью Ox.

Разобьем произвольным образом $[a, b]$ при помощи некоторых несовпадающих друг с другом точек

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ на n элементарных отрезков

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$, длины которых обозначим через $\Delta\, x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1,2,3, \cdots, n)$.

Проведем ординаты, соответствующие точкам деления, тогда криволинейная трапеция разобьется на ряд полосок. В каждом из элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольно точку ξ_i и вычислим в ней значение данной функции $f(\xi_i)$. Произведение $f(\xi_i)\,\Delta\, x_i$ выражает площадь прямоугольника с основанием $\Delta\, x_i$ и высотой $f(\xi_i)$. Составим сумму всех таких произведений

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta\, x_i. \qquad (1)$$

Эта сумма называется интегральной суммой (или суммой Римана) для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Она выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников и приближенно заменяющей данную трапецию. Очевидно, интегральная сумма (1) зависит от способа разбиения и выбора точек ξ_i.

Введем понятие предела интегральной суммы. Число s называется пределом интегральной суммы s_n (1) при $max\,\Delta\, x_i \to 0$, если $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall$ для любого разбиения $[a, b]$ из $max\,\Delta\, x_i < \delta \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$ независимо от выбора точек ξ_i на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$.

Предположим, что рассматриваемая сумма имеет предел, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю; этот предел дает площадь криволинейной трапеции s и называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Обозначение

$$s = \int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta\, x_i. \qquad (2)$$

$f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования, a - нижним пределом интегрирования, b - верхним пределом интегрирования.

Из определения следует, что величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \cdots = \int_a^b f(u)du.$

Функция, для которой существует предел (2), называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Из рассмотренной задачи становится ясным геометрический смысл определенного интеграла – он равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Задача о вычислении длины пути по заданной скорости

Пусть точка M движется прямолинейно с переменной скоростью $v = f(t)$. Вычислим длину пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T.

Промежуток $[t_0, T]$ разобьем произвольным образом на n элементарных промежутков $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n = T]$ длины $\Delta\, t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1,2, \cdots, n)$. В течение малого промежутка времени $\Delta\, t_i$ скорость движения можно приближенно считать постоянной и равной $f(t_i')$, где t_i' — некоторое произвольное значение t из перомежутка $[t_{i-1}, t_i]$, поэтому длина пути, пройденного за этот промежуток приближенно равна $f(t_i') \Delta\, t_i$. Складывая все частные длины $f(t_i') \Delta\, t_i$, получаем приближенное значене длины пути, пройденного точкой за промежуток от t_0 до T:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i') \Delta\, t_i \qquad (3)$$

Переходя к пределу при $max \Delta\, t_i \to 0$, находим точное значение длины пути s и в то же время получаем определенный интеграл от функции $v = f(t)$ на отрезке $[t_0, T]$:

$$s = \lim_{max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i') \Delta\, t_i = \int_{t_0}^{T} f(t)dt. \qquad (4)$$

Таким образом, физический смысл определенного интеграла состоит в том, что если $v = f(t)$ — скорость прямолинейного движения, то определенный интеграл (4) дает длину пути, пройденного за промежуток времени от t_o до T.

Необходимое условие интегрируемости функции

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она и ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Необходимость этого условия покажем, доказав утверждение: неограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ не интегрируема на этом отрезке.

В самом деле, если $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,b]$, то она не ограничена на некотором элементарном отрезке $[x_{i-1},x_i]$. За счет выбора точки ξ_i интегральную сумму можно сделать сколь угодно большой, а такая интегральная сумма не имеет конечного предела.

Достаточно ли ограниченности функции для существования определенного интеграла ? Оказывается , нет. Для того, чтобы доказать это, достаточно найти хотя бы один пример, показывающий, что интеграл для ограниченной функции не существует.

Вот такой пример. Функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число,} \\ 0, & x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

На любом отрезке $[a,b]$ эта функция ограничена, но не является интегрируемой на нем. Действительно, если в каждом элементарном отрезке $[x_{i-1},x_i]$ выбрать рациональную точку ξ_i, то интегральная сумма $s_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \vartriangle x_i=\sum_{i=1}^{n}\vartriangle x_i=b-a$. Если выбрать иррациональную точку ξ_i, то $s_n=0$. Предел интегральных сумм для функции Дирихле не существует, поэтому функция не является интегрируемой.

Отметим без доказательства, что справедливы следующие теоремы.

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c,d]$, содержащемся в $[a,b]$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она и интегрируема на этом отрезке.

3. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на $[a,b]$.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx=0$. Эта формула рассматривается как соглашение. Она естественна с геометрической точки зрения. Так как основание криволинейной трапеции имеет длину, равную нулю, то и площадь этой криволинейной трапеции равна нулю.

2. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$. Эта формула также рассматривается как соглашение. Она представляет собой естественное обобщение понятия интеграла на случай, когда отрезок $[a,b]$ при $a<b$ пробегается в направлении от b к a (в этом случае в интегральной сумме все разности $\vartriangle x_i=x_i-x_{i-1}$ имеют отрицательный знак).

3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла: $\int_a^b f(x)dx=A\int_a^b f(x)dx$.

Доказательство.

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{max\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Af(\xi_i) \triangle x_i = A\int_a^b f(x)dx.$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых.

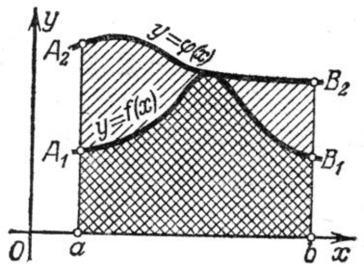
В случае двух слагаемых:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доказательство аналогично предыдущему доказательству.

5. Если на отрезке $[a, b]$, где $a < b$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$.

Доказательство. Рассмотрим разность:



$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx =$$

$$\lim_{max\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)] \triangle x_i.$$

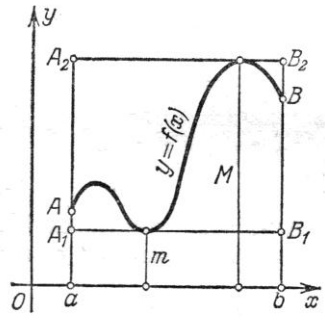
Здесь $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \ge 0$, $\triangle x_i \ge 0$. Следовательно, каждое слагаемое суммы неотрицательно, неотрицательна вся сумма и неотрицателен ее предел, т.е. $\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0$, откуда

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx. \quad \text{Ч.т.д.}$$

Если $f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$, то это свойство наглядно иллюстрируется геометрически. Так как $\varphi(x) \ge f(x)$, то площадь криволинейной трапеции aA_1B_1b не больше площади криволинейной трапеции aA_2B_2b.

6. Оценка определенного интеграла.

Если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $a \le b$, то



$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Доказательство. По условию $m \le f(x) \le M$.

На основании свойства 5 имеем:

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx.$$

Но $\int_a^b mdx = m(b-a)$, $\quad \int_a^b Mdx = M(b-a)$.

Подставляя, получим:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Если $f(x) \ge 0$, то это свойство легко иллюстрируется геометрически. Площадь криволинейной трапеции $aABb$ содержится между площадями прямоугольников aA_1B_1b и aA_2B_2b.

7. Теорема о среднем.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Доказательство. Пусть для определенности $a < b$. В силу свойства 6:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Отсюда $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$, где $m \le \mu \le M$.

Так как $f(x)$ непрарывна на $[a,b]$, то она принимает все промежуточные значения, заключенные между m и M. Следовательно, при некотором значении ξ $(a \le \xi \le b)$ будет $\mu = f(\xi)$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

8. Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если только все эти три интеграла существуют.

Доказательство. Предположим сначала, что $a < c < b$, и составим интегральную сумму для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части, то мы будем разбивать отрезок $[a,b]$ на малые отрезки так, чтобы точка c была точкой деления. Разобьем далее интегральную сумму $\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i$, соответствующую отрезку $[a,b]$, на две суммы: сумму $\sum_a^c f(\xi_i) \Delta x_i$, соответствующую отрезку $[a,c]$, и сумму $\sum_c^b f(\xi_i) \Delta x_i$, соответствующую отрезку $[c,b]$. Тогда

$$\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $max \Delta x_i \to 0$, получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Если $a < b < c$, то на основании доказанного можем написать:

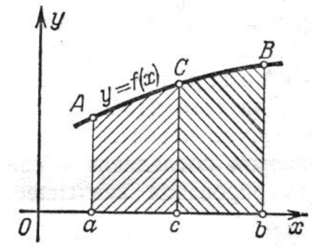
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

откуда с использованием свойства 2 получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Аналогичным образом доказывается это свойство при любом другом расположении точек a, b, c.

На рисунке дана геометрическая иллюстрация свойства 8 для того случая, когда $f(x) > 0$ и $a < c < b$: площадь трапеции $aABb$ равна сумме площадей трапеций $aACc$ и $cCBb$.

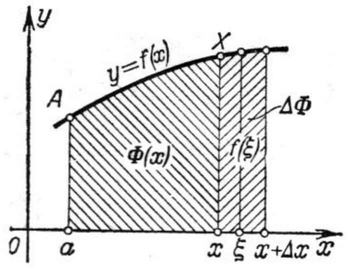


Лекция 16.

Вычисление определенного интеграла

Пусть в определенном интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a закреплен, а верхний предел b меняется. Тогда будет меняться и значение интеграла, т.е. интеграл станет функцией верхнего предела. Для того, чтобы иметь привычные обозначения, верхний предел обозначим через x, а чтобы не смешивать его с переменной интегрирования, последнюю обозначим через t, т.к. от обозначения переменной интегрирования значение интеграла не зависит. Получим интеграл $\int_a^x f(t)dt$. При постоянном a этот интеграл будет представлять собой функцию верхнего предела x. Эту функцию мы обозначим через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (1)$$



Если $f(t)$ – неотрицательная функция, то величина $\Phi(x)$ численно равна площади криволинейной трапеции $aAXx$. Очевидно что эта площадь изменяется в зависимости от изменения x. Найдем производную от $\Phi(x)$ по x, т.е. найдем производную определенного интеграла (1) по верхнему пределу.

Теорема 1. Если $f(x)$ – непрерывная функция и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то имеет место равенство $\Phi'(x) = f(x)$.

Иными словами, производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела (при условии, что подынтегральная функция непрерывна).

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx, тогда (учитывая свойство 8 определенного интеграла) получим:

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Приращение функции $\Phi(x)$ равно:

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Применим теперь теорему о среднем (свойство 7 определенного интеграла):

$$\Delta\Phi = f(\xi)\,\Delta x, \text{ где } x \le \xi \le x+\Delta x.$$

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Следовательно, $\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)$.

Но, т.к. $\xi \to x$ при $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi),$$

а вследствие непрерывности функции $f(x)$

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Таким образом, $\Phi'(x) = f(x)$. Ч.т.д.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что всякая непрерывная функция имеет первообразную.

Теорема 2. Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Эта формула называется формулой Ньютона – Лейбница.

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть некоторая первообразная от функции $f(x)$. По теореме 1 функция $\int_a^x f(t)dt$ есть также первообразная от $f(x)$. Но две любые первообразные от данной функции отличаются на постоянное слагаемое C. Следовательно, можно написать:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C. \qquad (3)$$

Это равенство при соответствующем выборе C справедливо при всех значениях x, т.е. является тождеством. Для определения постоянного C положим в этом тождестве $x = a$; тогда

$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$, откуда $C = -F(a)$. Следовательно,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$, получим формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

или, заменив обозначение переменной интегрирования на x:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона – Лейбница дает практически удобный метод вычисления определенных интегралов в том случае, когда известна первообразная подынтегральной функции.

Замена переменного в определенном интеграле

Теорема. Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Введем новое переменное t по формуле $x = \varphi(t)$.

Если 1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$,

3) $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Доказательство. Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то можем написать следующие равенства:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C. \qquad (3)$$

Из (2) получаем: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

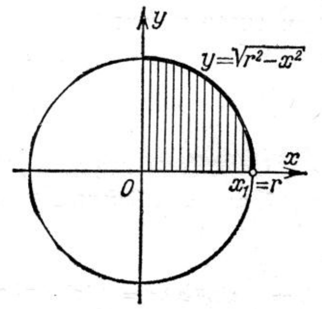
Из (3) получаем:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Правые части последних выражений равны, следовательно, равны и левые.

Замечание. При вычислении определенного интеграла по формуле (1) мы не возвращаемся к старой переменной. Если мы вычислим второй из определенных интегралов равенства (1), то мы получим некоторое число; этому же числу равняется и первый интеграл.

Пример. $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx$.



Сделаем подстановку: $x = Rsint, \quad dx = Rcostdt$.

Определим новые пределы:

x	0	R
t	0	$\frac{\pi}{2}$

Следовательно,

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 sin^2 t} Rcostdt =$$

$$R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sin^2 t} costdt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 tdt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos2t}{2} dt =$$

$$R^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{sin2t}{4}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Вычисленный интеграл с геометрической точки зрения представляет площадь $\frac{1}{4}$ круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = R^2$.

Интегрирование по частям

Пусть u и v – дифференцируемые функции от x. Тогда

$$(uv)' = u'v + uv.$$

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx.$$

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv.$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Последняя формула называется формулой интегрирования по частям.

Пример. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

$(u = x,\ dv = \sin x dx,\ du = dx,\ v = -\cos x)$.

Приближенное вычисление определенных интегралов

1. Формулы прямоугольников.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Разделим отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$ на n равных частей длины Δx: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Обозначим далее через $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n$ значения функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, т.е.

$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \cdots, y_n = f(x_n)$.

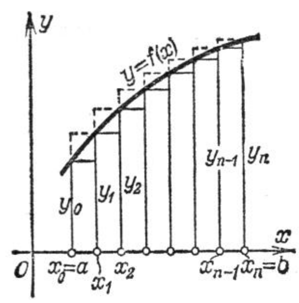
Составим суммы:

$$y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \cdots + y_{n-1} \Delta x,$$
$$y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \cdots + y_n \Delta x.$$

Каждая из этих сумм является интегральной суммой для $f(x)$ на $[a, b]$ и поэтому приближенно выражает интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}), \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n). \qquad (1')$$



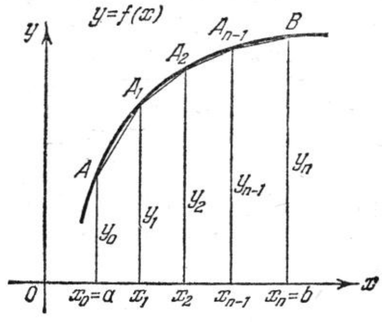
Это и есть формулы прямоугольников.

Из рисунка ясно, что если $f(x)$ – положительная и возрастающая функция, то (1) выражает площадь ступенчатой фигуры, составленной из "входящих" прямоугольников, а (1') – площадь ступенчатой фигуры, составленной из "выходящих" прямоугольников.

Ошибка тем меньше, чем больше n (меньше шаг деления $\Delta x = \frac{b-a}{n}$).

2. Формула трапеций.

Естественно ожидать, что мы получим более точное значение определенного интеграла, если данную кривую $y = f(x)$ заменим не ступенчатой линией, как это было в формулах прямоугольников, а вписанной ломаной. Тогда площадь криволинейной трапеции $aABb$ заменится суммой площадей



прямолинейных трапеций, ограниченных сверху хордами $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}B$. Так как площадь первой из этих трапеций равна $\frac{y_0+y_1}{2} \Delta x$, второй - $\frac{y_1+y_2}{2} \Delta x$ и т.д., то

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1+y_2}{2} \Delta x + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \Delta x\right),$$ или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

Это и есть формула трапеций.

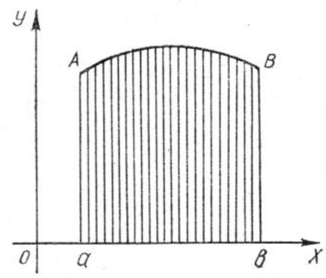
Число, стоящее в правой части формулы (2), есть среднее арифметическое чисел, стоящих в правых частях формул (1) и (1').

Чем больше будет n (меньше шаг деления $\Delta x = \frac{b-a}{n}$), тем с большей точностью сумма, написанная в правой части приближенного равенства (2), будет давать значение интеграла.

Лекция 17.

Приложения определенного интеграла

Площадь криволинейной фигуры в прямоугольных координатах

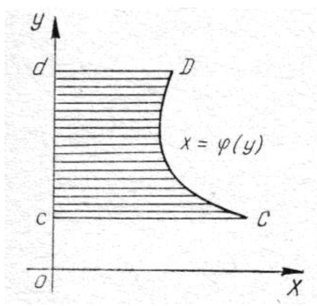


Как было показано ранее, площадь криволинейной трапеции $aABb$ вычисляется по формуле:

$$s = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

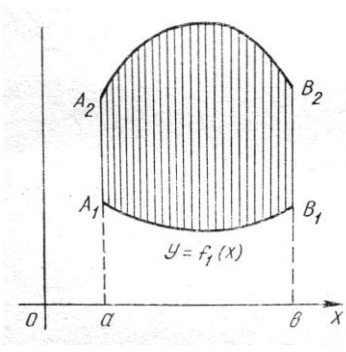
Здесь предполагалось, что $a < b$ и $f(x) \geq 0$.

Если же будет $a < b$, но $f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x)dx = -s$.



Площадь криволинейной трапеции $cCDd$ определяется формулой:

$$s = \int_c^d \varphi(y)dy. \qquad (2)$$

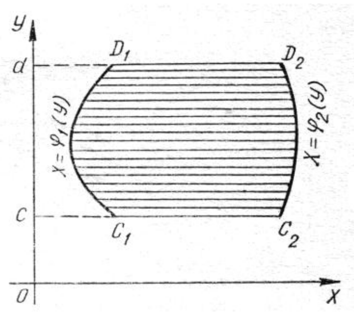


Площадь криволинейной фигуры $A_1A_2B_2B_1$ вычисляется по формуле:

$$s = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad (3)$$

Эта формула получается с помощью формулы (1), т.к. указанная фигура представляет разность двух криволинейных трапеций.

Площадь фигуры $C_1D_1D_2C_2$ определяется формулой:

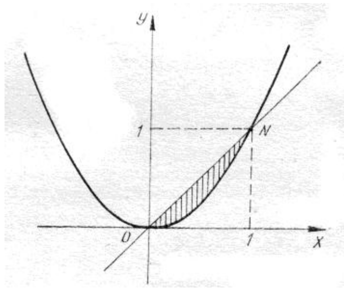


$$s = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]dy. \qquad (4)$$

В более общем случае криволинейную фигуру разбивают на части, площади которых вычисляются по приведенным формулам или определяются непосредственно.

Если $a < b$ и $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций: $\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$.

Пример. Вычислить площадь криволинейной фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = x$. Данные линии пересекаются в точках $O(0,0)$ и $N(1,1)$. Воспользуемся формулой (3):



$$s = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Рассмотрим случай, когда линия, ограничивающая криволинейную трапецию сверху, задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad (5)$$

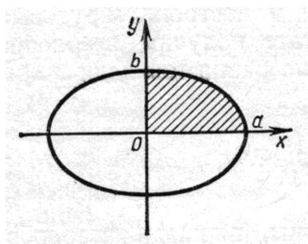
где $\alpha \le t \le \beta, \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$.

Уравнения (5) определяют некоторую функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$s = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)dx.$$

Перейдем к новой переменной по формуле $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$. На основании уравнений (5) получаем: $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$.

Следовательно: $s = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (6)$



Пример. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом:

$$x = acost, \quad y = bsint.$$

В силу симметрии эллипса относительно координатных осей достаточно вычислить площадь области, лежащей в первой четверти, и результат умножить на 4. Находим новые пределы:

x	0	a

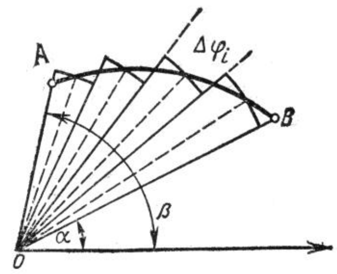
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$s = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} bsint(-asint)dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^2tdt =$

$4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos2t}{2}dt = 4ab\left(\frac{t}{2} - \frac{sin2t}{4}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$

В частном случае, когда $a = b = R$, получим $s = \pi R^2 -$ площадь круга радиуса R.

Площадь криволинейного сектора в полярных координатах



Рассмотрим криволинейный сектор OAB, ограниченный линией, заданной уравнением $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

Сектор OAB разобьем произвольным образом на n частичных секторов $OM_{i-1}M_i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, обозначим через $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Каждый из частичных секторов $OM_{i-1}M_i$ заменим круговым сектором с радиусом $r_i = r(\varphi_i')$, где $\varphi_i' -$ значение угла φ из промежутка $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, и центральным углом $\Delta\varphi_i$. Площадь последнего сектора выражается формулой: $\Delta s_i = \frac{\pi r_i^2 \Delta\varphi_i}{2\pi} = \frac{1}{2}r_i^2 \Delta\varphi_i$.

Сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[r(\varphi_i')]^2 \Delta\varphi_i$

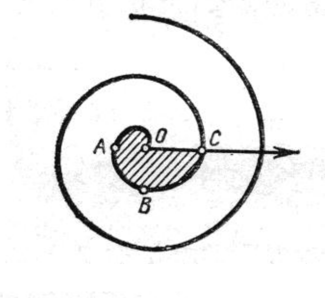
Выражает площадь "ступенчатого" сектора (веерообразной фигуры), аппроксимирующего данный сектор OAB.

Площадью сектора OAB называется предел площади "ступенчатого" сектора при $max\,\Delta\varphi_i \to 0$.

$$S = \lim_{max\Delta\varphi_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[r(\varphi_i')]^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

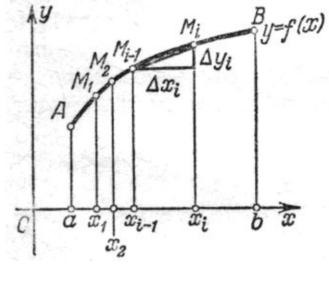
Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда: $r = a\varphi$, где $a -$ положительное число.

$S_{OABC} = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$



Круг радиуса OC имеет площадь $\pi \cdot OC^2 = \pi \cdot (a \cdot 2\pi)^2 = 4\pi^3 a^2$, т.е. площадь $S_{OABC} = \frac{1}{3}$ площади круга с радиусом, равным наибольшему из полярных радиусов витка. К этому выводу пришел еще Архимед.

Длина дуги кривой в прямоугольных координатах



Пусть в прямоугольных координатах на плоскости дана кривая уравнением $y = f(x)$. Найдем длину дуги

$\breve{AB}$ этой кривой. Возьмем на дуге $\breve{AB}$ точки $A, M_1, M_2, \cdots, M_{i-1}M_i, \cdots, M_{n-1}, B$ с абсциссами

$a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$ и проведем хорды

$AM_1, M_1M_2, \cdots, M_{i-1}M_i, \cdots, M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_i, \cdots, \Delta s_n$. Тогда получим ломаную $AM_1M_2 \cdots M_{n-1}B$, вписанную в дугу $\breve{AB}$. Длина ломаной равна $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$.

Длиной S дуги $\breve{AB}$ называется тот предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стемится к нулю: $S = \lim_{max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$.

Мы докажем сейчас, что если на отрезке $a \le x \le b$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует. Вместе с тем будет дан и способ вычисления длины дуги.

Введем обозначения: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

Тогда $\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. По теореме Лагранжа имеем:

$\Delta y_i = f'(\xi_i) \Delta x_i$, где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Следовательно

$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + f'^2(\xi_i)(\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$.

Таким образом, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$.

По условию $f'(x)$ непрерывна, следовательно, функция $\sqrt{1 + {f'}^2(x)}$ тоже непрерывна. Поэтому существует предел написанной интегральной суммы при условии, что $max \Delta s_i \to 0$ (а значит и $max \Delta x_i \to 0$), который равен определенному интегралу:

$$S = \lim_{max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + {f'}^2(x)}\, dx.$$

Итак, получили формулу для вычисления длины дуги:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + {f'}^2(x)}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (7)$$

Найдем теперь длину дуги кривой в том случае, когда уравнение кривой задано в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $\varphi'(t) \ne 0$ на $[\alpha, \beta]$.

В этом случае эти уравнения определяют некоторую функцию $y = f(x)$, непрерывную и имеющую непрерывную производную $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Пусть $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда, сделав в интеграле (7) подстановку $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, получим:

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt. \qquad (8)$$

Если задана пространственная кривая параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta), \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

то если $\varphi(t), \psi(t)$, $\chi(t)$ – непрерывны и имеют непрерывные производные на $[\alpha, \beta]$, то

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}dt$$ (без доказательства).

Длина дуги кривой в полярных координатах

Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой $r = f(\varphi)$, где r – полярный радиус, φ – полярный угол $(\gamma \le \varphi \le \delta)$.

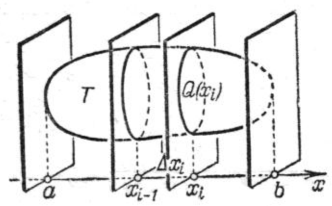
Напишем формулы перехода от полярных координат к прямоугольным

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Если сюда вместо r подставим его выражение через φ, то получим уравнения $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$. Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой и для вычисления длины дуги применим формулу (8). Для этого найдем $\frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi$, $\frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi$.

Тогда $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = f'^2(\varphi) + f^2(\varphi) = r'^2 + r^2$.

Следовательно, $S = \int_\gamma^\delta \sqrt{r'^2 + r^2}d\varphi$.

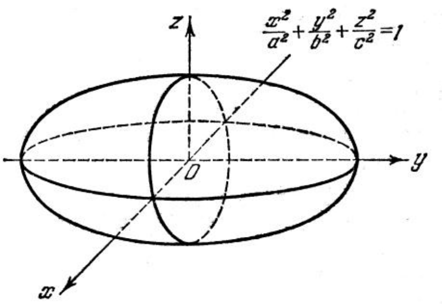
Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений



Пусть имеем некоторое тело. Предположим, что известна площадь любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox. Эта площадь будет зависеть от положения секущей плоскости, т.е. будет функцией от x: $Q = Q(x)$. Предположим что $Q(x)$ – непрерывная функция, а также, что все тело заключено между двумя перпендикулярными к оси Ox плоскостями, пересекающими ее в точках a и b $(a < b)$. Разобьем произвольным образом тело на n слоев с помощью секущих плоскостей, перпендикулярных к оси Ox и пересекающих ее в точках $x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$. В каждом частичном промежутке $x_{i-1} \le x \le x_i$ выберем произвольную точку ξ_i и для каждого значения $i = 1,2,\cdots,n$ построим цилиндрическое тело , образующая которого параллельна оси Ox, а направляющая представляет собой контур сечения тела плоскостью $x = \xi_i$. Объем такого элементарного цилиндра с площадью основания $Q(\xi_i)$ и высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ равен $Q(\xi_i) \Delta x_i$. Объем всех цилиндров будет: $V_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i) \Delta x_i$. Предел этой суммы при $max \Delta x_i \to 0$ (если он существует) называется объемом данного тела:

$$V = \lim_{max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx. \qquad (*)$$

Пример. Вычислить объем трехосного эллипсоида:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

В сечении эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости Oyz и отстоящей на расстоянии x от нее, получится эллипс:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2};$$

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1,$$

с полуосями $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

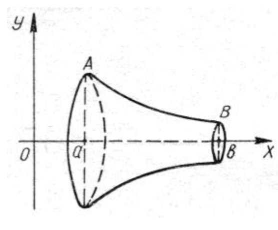
Но площадь такого эллипса равняется $\pi b_1 c_1$.

Поэтому $Q(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

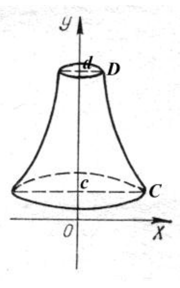
$$V = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, если $a = b = c = R$, эллипсоид превращается в шар, и $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Объем тела вращения



Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$. В этом случае $Q(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$. Применяя общую формулу $(*)$, получим формулу для вычисления объема тела вращения: $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.



Аналогично можно получить формулу для вычисления объема тела, образованного вращением вокруг оси Oy

криволинейной трапеции $cCDd$: $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$.

Лекция 18.

Несобственные интегралы

При введении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось, что выполняются условия:

1) пределы интегрирования a и b являются конечными;

2) подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Если эти оба условия выполняются, то такой интеграл называется собственным определенным интегралом. Но слово собственный обычно опускается.

Если хотя бы одно из двух указанных условий не выполняется, то интеграл называется несобственным определенным интегралом. Слово определенный здесь обычно опускается.

Мы будем изучать несобственные интегралы двух видов:

1.Интегралы с бесконечными пределами (когда нарушается условие 1)).

2.Интегралы от разрывных функций (когда нарушается условие 2)).

Несобственные интегралы с бесконечными пределами

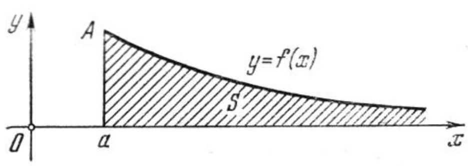
Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \leq x < +\infty$.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ с бесконечным верхним пределом называется интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

если предел, стоящий справа, существует. Говорят, что в этом случае несобственный интеграл существует или сходится. Если же этот предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится.

Легко выяснить геометрический смысл несобственного интеграла в случае, когда $f(x) \geq 0$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y = f(x)$, $x = a$ и осью абсцисс.



Аналогичным образом определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – любое конечное число.

Последнее равенство следует понимать так: если каждый из несобственных интегралов, стоящих справа, существует, то существует и интеграл, стоящий слева.

Пример. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \frac{\pi}{2}$.

Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится данный интеграл или расходится, и оценить его значение. Для этого могут быть полезными следующие теоремы, которые мы примем без доказательства, а применение их рассмотрим на примерах.

Теорема 1. Если для всех x $(x \geq a)$ выполняются неравенства $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и если $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится, при этом $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Пример. Исследовать, сходится ли $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Заметим, что при $x \geq 1$ $\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$.

Далее $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = 1$.

Следовательно, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ сходится и его значение < 1.

Теорема 2. Если для всех x $(x \geq a)$ выполняются неравенства $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, причем $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пример. Исследовать, сходится ли $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$.

Замечаем, что $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Но $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = +\infty$.

Следовательно, расходится и данный интеграл.

Теорема 3. Если $f(x)$ – знакопеременная функция на $[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причем говорят, что он сходится абсолютно.

Пример. Исследовать сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{sinx}{x^3}dx$.

Здесь подынтегральная функция – знакопеременная. Замечаем, что $\left|\frac{sinx}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right| = \frac{1}{x^3}$. Но $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^b = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{sinx}{x^3}\right| dx$ сходится. Отсюда следует, что сходится и данный интеграл, причем абсолютно.

Несобственные интегралы от разрывных функций

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \le x < b$, а при $x = b$ терпит разрыв. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \varepsilon > 0.$

Если предел, стоящий справа существует, то несобственный интеграл называется сходящимся, а если не существует, то – расходящимся.

Аналогично, если $f(x)$ определена и непрерывна при $a < x \le b$, а при $x = a$ терпит разрыв, то $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$

Если $f(x)$ имеет разрыв в какой-нибудь промежуточной точке $x = c$ отрезка $[a, b]$, $a < c < b$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Если оба интеграла в правой части сходятся, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$; этот интеграл расходится, если расходится хотя бы один из интегралов справа.

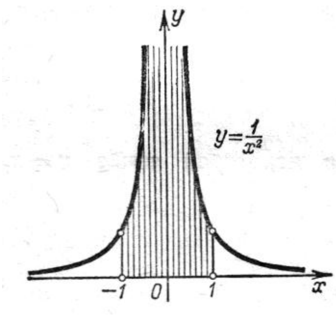
Пример 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{1-x}\,\Big|_0^{1-\varepsilon} = 2.$

Пример 2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Вычислим каждый интеграл отдельно.

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\,\Big|_{-1}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) = \infty.$$

Следовательно, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} -$ расходится.



Если бы мы стали вычислять данный интеграл, не обращая внимания на разрыв подынтегральной функции в точке $x = 0$, то получили бы неверный результат: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$, что невозможно.

Если $f(x)$, определенная на $[a, b]$, имеет внутри этого отрезка конечное число точек разрыва $a_1, a_2, \cdots, a_n$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \cdots + \int_{a_n}^{b} f(x)dx,$$

если каждый из несобственных интегралов в правой части сходится. Если же хотя бы один из этих интегралов расходится, то и $\int_a^b f(x)dx$ тоже расходится.

Для определения сходимости несобственных интегралов от разрывных функций и оценки их значений часто могут быть применены теоремы, аналогичные тем, которые были для оценки интегралов с бесконечными пределами.

Теорема 1. Если на $[a, b]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ разрывны только в точке b, причем во всех точках этого отрезка выполнены неравенства $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ также сходится, причем $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$.

Теорема 2. Если на $[a, b]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ разрывны только в точке b, причем во всех точках этого отрезка выполнены неравенства $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ расходится, то и $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

Теорема 3. Если $f(x)$ – знакопеременная функция на $[a, b]$, разрывная только в точке b и $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и $\int_a^b f(x)dx$, причем говорят, что он сходится абсолютно.

Пример. Сходится ли $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$?

$\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 = 2$ – сходится.

Следовательно, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$ – тоже сходится, причем он < 2.

IV. Ряды

Лекция 19.

Числовые ряды

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$.

Выражение $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (1)$

называется числовым рядом (или просто рядом). При этом числа $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ называются членами ряда.

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n-й частичной суммой ряда: $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы:

$s_1 = u_1$,
$s_2 = u_1 + u_2$,
$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$,
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.

Если существует конечный предел s последовательности $\{s_n\}$, т.е. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, то его называют суммой ряда (1) и говорят, что ряд сходится.

Если $\lim_{n\to\infty} s_n$ не существует (например, $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$), то говорят, что ряд (1) расходится и суммы не имеет.

Пример. $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \qquad (2)$

Это ряд, составленный из членов геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем q $(a \neq 0)$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна (при $q \neq 1$)

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

1) Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$.

Значит в этом случае ряд (2) сходится и его сумма $s = \frac{a}{1-q}$.

2) Если $|q| > 1$, то $|q^n| \to \infty$ при $n \to \infty$ и тогда $\lim_{n\to\infty} s_n$ не существует. Таким образом, в этом случае ряд (2) расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд (2) имеет вид: $a + a + a + \cdots$.

$s_n = na$; $\quad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

4) Если $q = -1$, то ряд (2) имеет вид: $a - a + a - a + \cdots$.

В этом случае $s_n = 0$ при n четном, $s_n = a$ при n нечетном.

Следовательно, s_n предела не имеет, — ряд расходится.

Теоремы о сходимости рядов

Теорема 1. Если сходится ряд, получившийся из данного ряда (1) отбрасыванием нескольких его членов, то сходится и сам данный ряд. Обратно, если сходится данный ряд, то сходится и ряд, получившийся из данного отбрасыванием нескольких членов.

Доказательство. Пусть s_n — сумма n первых членов ряда (1), c_k — сумма k отброшенных членов (при достаточно большом n все отброшенные члены содержатся в сумме s_n), σ_{n-k} — сумма членов ряда, входящих в сумму s_n и не входящих в c_k. Тогда имеем: $s_n = c_k + \sigma_{n-k}$, где c_k — постоянное число, не зависящее от n. Из последнего соотношения следует, что если существует $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$, то существует и $\lim_{n\to\infty} s_n$; если существует $\lim_{n\to\infty} s_n$, то существует и $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$, а это и доказывает справедливость теоремы.

Теорема 2. Если ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (3)$

сходится и его сумма равна s, то ряд $cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$ (4), где c — какое-либо фиксированное число, также сходится и его сумма равна cs.

Доказательство. Обозначим n —ю частичную сумму ряда (3) через s_n, а ряда (4) — через σ_n. Тогда

$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cs_n$.

Отсюда ясно, что предел n —й частичной суммы ряда (4) существует, так как $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(cs_n) = c\lim_{n\to\infty} s_n = cs$.

Итак, ряд (4) сходится и его сумма равна cs.

Теорема 3. Если ряды $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ (5)

и $v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$ (6)

сходятся и их суммы, соответственно, равны $\bar{s}$ и $\bar{\bar{s}}$, то ряды

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) + \cdots \quad (7)$$

и $$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots + (u_n - v_n) + \cdots \quad (8)$$

также сходятся и их суммы, соответственно, равны $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$ и $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$.

Доказательство. Докажем сходимость ряда (7). Обозначая его n —ю частичную сумму через σ_n, а n —е частичные суммы рядов (5) и (6), соответственно, через $\bar{s}_n$ и $\bar{\bar{s}}_n$, получим

$\sigma_n = (u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) =$

$(u_1 + \cdots + u_n) + (v_1 + \cdots + v_n) = \bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(\bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n + \lim_{n\to\infty} \bar{\bar{s}}_n = \bar{s} + \bar{\bar{s}}$.

Таким образом, ряд (7) сходится и его сумма равна $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$.

Аналогично доказывается, что ряд (8) также сходится и его сумма равна $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$. Про ряды (7) и (8) говорят, что они получены в результате почленного сложения или, соответственно, почленного вычитания рядов (5) и (6).

Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд сходится, то его n —й член стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Доказательство. Пусть ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

сходится, т.е. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, где s —сумма ряда (конечное фиксированное число); но тогда имеет место также равенство $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$, т.к. при $n \to \infty$ и $(n-1) \to \infty$.

Вычитая почленно из первого равенства второе, получаем:

$\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$ или $\lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = 0$.

Но $s_n - s_{n-1} = u_n$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Что и требовалось доказать.

Следствие. Если n −й член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится.

Пример. Ряд $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$

расходится , т.к. $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\neq 0.$

Рассмотренный признак является только необходимым, но не является достаточным, т.е. из того, что n −й член стремится к нулю, еще не следует, что ряд сходится, — ряд может и расходиться.

Например, так называемый гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

расходится, хотя $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Расходимость гармонического ряда докажем позднее.

Теоремы о сравнении рядов с положительными членами

Пусть имеем два ряда с положительными членами:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (1)$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \qquad (2)$$

Для них справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если члены ряда (1) не больше соответствующих членов ряда (2), т.е. $u_n \le v_n \ \ (n=1,2,\cdots),\qquad (3)$

и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1), причем его сумма не больше суммы ряда (2).

Доказательство. Обозначим через s_n и σ_n, соответственно, n −е частичные суммы рядов (1) и (2). Из (3) следует, что $s_n \le \sigma_n. \qquad (4)$

Так как ряд (2) сходится, то существует $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$. Из того, что члены рядов (1) и (2) положительны, следует, что $\sigma_n<\sigma$, и тогда в силу неравенства (4) $s_n<\sigma$. Итак, последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ возрастает (т.к. ее члены положительны) и ограничена сверху, следовательно, она имеет предел $\lim_{n\to\infty} s_n$, причем очевидно, что $s\le\sigma$. На основании этой теоремы можно судить о сходимости некоторых рядов.

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$

Сходится, т.к. его члены меньше соответствующих членов ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

Но последний ряд сходится, т.к. его члены, начиная со второго, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Сумма этого ряда равна $\frac{3}{2}$. Следовательно, в силу теоремы 1, данный ряд тоже сходится, причем его сумма не превосходит $\frac{3}{2}$.

Теорема 2. Если члены ряда (1) не меньше соответствующих членов ряда (2), т.е. $u_n \geq v_n$, $\quad$ (5)

и ряд (2) расходится, то и ряд (1) расходится.

Доказательство. Из условия (5) следует, что $s_n \geq \sigma_n$. $\quad$ (6)

Так как члены ряда (2) положительны, то его частичная сумма σ_n возрастает при возрастании n, а так как он расходится, то

$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$. Но тогда в силу неравенства (6) $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, т.е. ряд (1) расходится.

Пример. Ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$

расходится, т.к. его члены (начиная со второго) больше соответствующих членов гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, который, как известно, расходится.

Замечание. Теоремы 1 и 2 справедливы и в случае, если неравенства (3) или (5) начинают выполняться лишь для $n \geq N$, а не для всех $n = 1,2,3,\cdots$.

Лекция 20.

Достаточные признаки сходимости рядов

Признак Даламбера

Теорема. Если для ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (1)$$

отношение $(n+1)$ *-го* члена к n *–му* при $n \to \infty$ имеет конечный предел l, т.е. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, $\quad$ (2)

то: 1) ряд сходится в случае $l < 1$,

2) ряд расходится в случае $l > 1$.

(В случае $l = 1$ ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда теорема не дает).

Доказательство. 1) Пусть $l < 1$. Рассмотрим число q, $l < q < 1$. Из определения предела и соотношения (2) следует, что для всех значений n, начиная с некоторого номера N, т.е. для $n \geq N$, будет иметь место неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$. $\quad$ (2′)

Записывая (2′) для различных n, начиная с номера N, получим:

$$\left.\begin{array}{c} u_{N+1} < q u_N, \\ u_{N+2} < q u_{N+1} < q^2 u_N, \\ u_{N+3} < q u_{N+2} < q^3 u_N, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь два ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots, \qquad (1)$$

$$u_N + q u_N + q^2 u_N + \cdots. \qquad (1')$$

Ряд $(1')$ составлен из членов геометрической прогрессии с положительным знаменателем $q < 1$. Следовательно, он сходится. Члены ряда (1), начиная с u_{N+1}, меньше членов ряда $(1')$. На основании доказанного ранее следует, что ряд (1) сходится.

2) Пусть $l > 1$. Тогда из равенства $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ (где $l > 1$) следует, что начиная с некоторого номера N, т.е. для $n \geq N$, будет иметь место неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$ для всех $n \geq N$. Но это означает, что члены ряда возрастают, начиная с номера $N + 1$, и поэтому общий член ряда не стремится к нулю. Следовательно, ряд расходится.

Пример. $1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots,$

$u_n = \frac{1}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$. Ряд сходится.

Радикальный признак Коши

Теорема. Если для ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (1)$$

величина $\sqrt[n]{u_n}$ имеет конечный предел l при $n \to \infty$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то:

1) в случае $l < 1$ ряд сходится,

2) в случае $l > 1$ ряд расходится.

(В случае $l = 1$ ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда теорема не дает.)

Доказательство. 1) Пусть $l < 1$. Рассмотрим число q, $l < q < 1$. Начиная с некоторого номера $n = N$, будет иметь место соотношение $\sqrt[n]{u_n} < q$ или $u_n < q^n$ для всех $n \geq N$.

Рассмотрим теперь два ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots \qquad (1)$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \cdots \qquad (1')$$

Ряд $(1')$ сходится, т.к. его члены образуют убывающую геометрическую прогрессию. Члены ряда (1), начиная с u_n, меньше членов ряда $(1')$.

Следовательно, ряд (1) сходится.

2) Пусть $l > 1$. Тогда, начиная с некоторого номера $n = N$, будем иметь: $\sqrt[n]{u_n} > 1$ или $u_n > 1$.

Но если все члены рассматриваемого ряда, начиная с u_N, больше 1, то ряд расходится, т.к. его общий член не стремится к нулю.

Пример. $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \cdots$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$ Ряд сходится.

Интегральный признак Коши

Теорема. Пусть члены ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ $\qquad (1)$

положительны и не возрастают, т.е. $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots,$ $\qquad (1')$

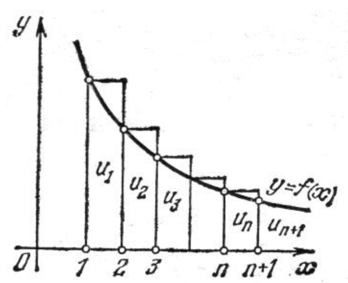
и пусть $f(x)$ – такая непрерывная невозрастающая функция, что

$f(1) = u_1,\ f(2) = u_2,\ \cdots\ ,\ f(n) = u_n,\ \cdots.$ $\qquad (2)$

Тогда справедливы следующие утверждения:

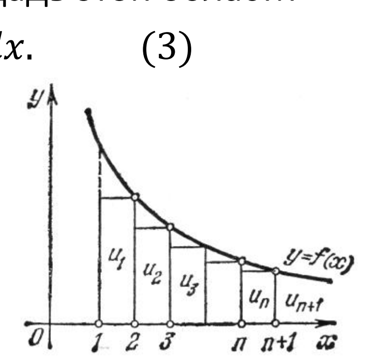
1) если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд (1),

2) если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд (1).



Доказательство. Изобразим члены ряда геометрически, откладывая по оси абсцисс номера $1,2,\cdots,n,n+1,\cdots$ членов ряда, а по оси ординат – соответствующие значения членов ряда $u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}, \cdots$. Построим на том же чертеже график непрерывной невозрастающей функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условию (2). Рассматривая чертеж, замечаем, что первый из построенных прямоугольников имеет основание, равное 1, и высоту u_1. Следовательно, площадь этого прямоугольника u_1. Площадь второго прямоугольника u_2 и т.д.; наконец, площадь n –*го* прямоугольника u_n. Сумма площадей построенных прямоугольников равна сумме s_n первых n членов ряда. С другой стороны, ступенчатая фигура, образованная этими прямоугольниками, заключает область, ограниченную кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = 1,\ x = n+1,\ y = 0$; площадь этой области равна $\int_1^{n+1} f(x)dx$. Следовательно, $s_n > \int_1^{n+1} f(x)dx.$ $\qquad (3)$

Сделаем теперь такой чертеж и рассмотрим его. Здесь первый из построенных прямоугольников



имеет высоту u_2; следовательно, его площадь также u_2. Площадь второго прямоугольника u_3 и т.д. Площадь последнего из построенных прямоугольников u_{n+1}. Следовательно, сумма площадей всех построенных прямоугольников равна сумме всех членов ряда, начиная от второго до $(n+1)-го$, т.е. равна $s_{n+1}-u_1$. С другой стороны, ступенчатая фигура, образованная этими прямоугольниками, содержится внутри области, ограниченной кривой $y=f(x)$ и прямыми $x=1$, $x=n+1$, $y=0$. Площадь этой области равна $\int_1^{n+1} f(x)dx$. Следовательно,

$$s_{n+1}-u_1<\int_1^{n+1} f(x)dx, \text{ откуда } s_{n+1}<\int_1^{n+1} f(x)dx+u_1. \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь два случая.

1. Предположим, что интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. имеет конечное значение. Так как $\int_1^{n+1} f(x)dx<\int_1^{+\infty} f(x)dx$, то в силу (4)

$$s_n<s_{n+1}<\int_1^{+\infty} f(x)dx+u_1,$$

т.е. частичная сумма s_n остается ограниченной при всех значениях n. Но при увеличении n она возрастает, т.к. все члены u_n положительны. Следовательно, s_n при $n\to\infty$ имеет конечный предел $\lim_{n\to\infty} s_n=s$, т.е. ряд сходится.

2. Предположим далее, что $\int_1^{+\infty} f(x)dx=\infty$. Это значит, что $\int_1^{n+1} f(x)dx$ неограниченно возрастает при возрастании n. Но тогда в силу неравенства (3) s_n также неограниченно возрастает при возрастании n, т.е. ряд расходится.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание. Доказанная теорема остается справедливой, если неравенства $(1')$ выполняются, лишь начиная с некоторого N.

Пример. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$.

Применим интегральный признак, положив $f(x)=\frac{1}{x}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы.

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=lnx\Big|_1^{+\infty}=\infty$, т.е. интеграл расходится, значит и наш гармонический ряд расходится.

Лекция 21.

Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Будем теперь рассматривать ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, т.е. ряды вида $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$,

где $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ положительны.

Теорема. Если в знакочередующемся ряде

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \qquad (u_n > 0) \qquad (1)$$

члены таковы, что $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots \qquad (2)$

и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \qquad (3)$

то ряд (1) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Доказательство. Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов ряда (1):

$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m})$.

Из условия (2) следует, что выражение в каждой скобке положительно. Следовательно, сумма s_{2m} положительна, $s_{2m} > 0$, и возрастает с возрастанием m. Запишем теперь эту же сумму так:

$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$.

В силу условия (2) каждая из скобок положительна. Поэтому в результате вычитания этих скобок и u_{2m} из u_1 мы получим число, меньшее, чем u_1, т.е. $s_{2m} < u_1$. Таким образом, мы установили, что s_{2m} при возрастании m возрастает и ограничена сверху. Отсюда следует, что s_{2m} имеет предел s: $\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s$, причем $0 < s < u_1$. Однако, сходимость ряда еще не доказана; мы доказали только, что последовательность "четных" частичных сумм имеет пределом число s. Докажем теперь, что "нечетные" частичные суммы также стремятся к пределу s.

$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$. Так как по условию $\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$, то, следовательно, $\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = s$.

Тем самым мы доказали, что $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ как при четном n, так и при нечетном n. Следовательно, ряд (1) сходится.

Замечание 1. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства (2) выполняются, начиная с некоторого N.

Замечание 2. Если знакочередующийся ряд удовлетворяет условию теоремы Лейбница, то нетрудно оценить ошибку, которая получится, если заменить его сумму s частичной суммой s_n. При такой замене мы отбрасываем все члены ряда, начиная с u_{n+1}. Но эти числа сами образуют знакочередующийся ряд, сумма которого по абсолютной величине меньше первого члена этого ряда (т.е. меньше u_{n+1}). Значит, ошибка, совершаемая при замене s на s_n, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.

Пример. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Этот ряд сходится, так как

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots$

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Сумма первых n членов отличается от суммы ряда на величину меньшую, чем $\frac{1}{n+1}$.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные. Рассмотренные только что знакочередующиеся ряды являются, очевидно, частным случаем знакопеременных рядов. Здесь будем полагать, что $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Следующая теорема дает важный достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Теорема 1. Если знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (1)$$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots \qquad (2)$$

сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.

Доказательство. Пусть s_n и σ_n — суммы n первых членов рядов (1) и (2). Пусть далее s_n' — сумма всех положительных, а s_n'' — сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов данного ряда; тогда $s_n = s_n' - s_n''$, $\sigma_n = s_n' + s_n''$.

По условию, σ_n имеет предел σ; s_n' и s_n'' — положительные возрастающие величины, меньшие σ. Следовательно, они имеют пределы s' и s''. Из соотношения $s_n = s_n' - s_n''$ следует, что и s_n имеет предел и этот предел равен $s' - s''$, т.е. знакопеременный ряд (1) сходится.

Доказанная теорема дает возможность судить о сходимости некоторых знакопеременных рядов.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{sin\alpha}{1^2} + \frac{sin2\alpha}{2^2} + \frac{sin3\alpha}{3^2} + \cdots + \frac{sinn\alpha}{n^2} + \cdots, \qquad (3)$$

где α —любое число.

Наряду с (3), рассмотрим ряды

$$\left|\frac{sin\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{sin2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{sin3\alpha}{3^2}\right| + \cdots + \left|\frac{sinn\alpha}{n^2}\right| + \cdots, \qquad (4)$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots. \qquad (5)$$

Ряд (5) сходится (доказывается с помощью интегрального признака Коши: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty} = 1$). Члены ряда (4) не больше соответственных членов ряда (5); следовательно, ряд (4) тоже сходится. Но тогда, в силу доказанной теоремы, (3) тоже сходится.

Признак сходимости, доказанный выше, является только достаточным признаком сходимости знакопеременного ряда, но не необходимым: существуют такие знакопеременные ряды, которые сами сходятся, но ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся. В связи с этим полезно ввести понятия об абсолютной и условной сходимости знакопеременного ряда и на основе этих понятий классифицировать знакопеременные ряды.

Знакопеременный ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов (2). Если же знакопеременный ряд (1) сходится, а ряд (2), составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный знакопеременный ряд (1) называется условно или неабсолютно сходящимся рядом.

В заключение отметим без доказательства следующие свойства абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов.

Теорема 2. Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.

Теорема 3. Если ряд сходится условно, то какое бы мы ни задали число A, можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась в точности равной A. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, окажется расходящимся.

Пример 1. В знакопеременных рядах нельзя даже группировать члены. Знакомый нам ряд $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{k-1}+\cdots$

является расходящимся. После группировки членов

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots+0+\cdots=0$$

Получаем сходящийся ряд, его сумма равна нулю.

При другой группировке членов

$$1-(1-1)-(1-1)-\cdots-(1-1)-\cdots=1-0-0-\cdots-0-\cdots=1$$

получаем сходящийся ряд, сумма которого равна единице.

Пример 2. Знакопеременный ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \qquad (*)$

является условно сходящимся. Обозначим его сумму через s. Очевидно, что $s>0$. Сделаем перестановку его членов так, чтобы за одним положительным членом следовали два отрицательных:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\cdots. \qquad (**)$$

Докажем, что полученный ряд сходится, но что его сумма s' в два раза меньше суммы ряда $(*)$, т.е. равна $\frac{1}{2}s$. Обозначим через s_n и s'_n частичные суммы рядов $(*)$ и $(**)$.

Рассмотрим сумму $3k$ членов ряда $(**)$:

$$s'_{3k} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) =$$
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}s_{3k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}s_{3k} = \frac{1}{2}s.$$

Далее,

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(s'_{3k} + \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}s,$$
$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k+2} = \lim_{k\to\infty} \left(s'_{3k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}\right) = \frac{1}{2}s.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = s' = \frac{1}{2}s.$$

Итак, в данном случае сумма ряда изменилась после перестановки его членов (уменьшилась вдвое).

Лекция 22.

Функциональные ряды

Функциональным рядом называется ряд, члены которого являются функциями от x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \qquad (1)$$

Зафиксируем некоторое значение $x = x_0$, получим числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \qquad (2)$$

Если числовой ряд (2) сходится, то значение x_0 называется точкой сходимости функционального ряда (1). Множество всех точек сходимости функционального ряда называется областью его сходимости. Если числовой ряд (2) расходится, то x_0 называется точкой расходимости функционального ряда (1).

Функциональный ряд (1) называется абсолютно сходящимся в некоторой области, если в ней сходится ряд из модулей его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = |u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots + |u_n(x)| + \cdots$$

Поскольку каждой точке x_0 сходимости ряда (1) ставится в соответствие определенное значение суммы ряда (2), то сумма сходящегося в некоторой области функционального ряда (1) является функцией переменной x. Обозначим эту функцию через $s(x)$; тогда

$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, где $s_n(x) -$ *-я* частичная сумма ряда (1), т.е.

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x).$$

Остатком функционального ряда (1) после n *-го* члена называется ряд, полученный из данного отбрасыванием n его первых членов. Отметим, что функциональный ряд (1) и любой его остаток в некоторой области одновременно сходятся или расходятся.

Пусть функциональный ряд (1) сходится в некоторой области. Сумму остатка после *-го* члена обозначим через $r_n(x)$. Тогда

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Важным частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды.

Степенные ряды.Теорема Абеля

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ $-$ постоянные числа, называемые коэффициентами ряда.

Теорема 1 (теорема Абеля).

1) Если степенной ряд сходится при некотором значении x_0, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении x, для которого $|x| < |x_0|$;

2) если ряд расходится при некотором значении x_0', то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_0'|$.

Доказательство. 1) Так как, по предположению, числовой ряд

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n + \cdots \qquad (2)$$

Сходится, то его общий член $a_nx_0^n \to 0$ при $n \to \infty$, а это значит, что существует такое число $M > 0$, что все члены ряда по абсолютной величине меньше M.

Перепишем ряд (1) в виде:

$$a_0 + a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \cdots + a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \cdots \qquad (3)$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов

$$|a_0| + |a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_n}\right|^n + \cdots. \qquad (4)$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots. \qquad (5)$$

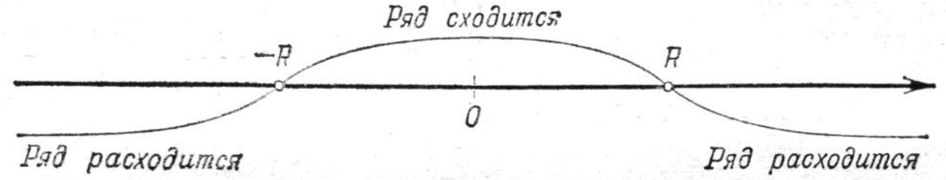
При $|x| < |x_0|$ члены последнего ряда составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно, этот ряд сходится. Так как члены ряда (4) меньше соответствующих членов ряда (5), то ряд (4) тоже сходится, а это и значит, что ряд (3) или (1) сходится абсолютно.

2) Докажем вторую часть теоремы: пусть в некоторой точке x_0' ряд (1) расходится. Тогда он будет расходиться в любой точке x, удовлетворяющей условию $|x| > |x_0'|$. Действительно, если бы в какой-либо точке x, удовлетворяющей этому условию, ряд сходился, то, в силу только что доказанной первой части теоремы, он должен был бы сходиться и в точке x_0', т.к. $|x_0'| < |x|$. Но это противоречит условию, что в точке x_0' ряд расходится. Следовательно, ряд расходится и в точке x. Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда. Действительно, если x_0 есть точка сходимости, то весь интервал $(-|x_0|, |x_0|)$ заполнен точками абсолютной сходимости. Если x_0' — точка расходимости, то вся бесконечная полупрямая вправо от точки $|x_0'|$ и вся полупрямая влево от точки $-|x_0'|$ состоят из точек расходимости. Из этого можно заключить, что существует такое число R, что при $|x| < R$ мы имеем точки абсолютной сходимости и при $|x| > R$ — точки расходимости. Таким образом, имеет место следующая теорема о строении области сходимости степенного ряда.

Теорема 2. Областью сходимости степенного ряда является интервал с центром в начале координат.

Интервалом сходимости степенного ряда называется такой интервал от $-R$ до $+R$, что для всякой точки x, лежащей внутри этого интервала, ряд сходится и притом абсолютно, а для точек x, лежащих вне его , ряд расходится. Число R называют радиусом сходимости степенного ряда. На



концах интервала (т.е. при $x = R$ и при $x = -R$) вопрос о сходимости или расходимости данного ряда решается особо. У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку $(R = 0)$, у других охватывает всю ось Ox $(R = \infty)$.

Часто радиус сходимости степенного ряда может быть определен с помощью признака Даламбера.

Для этого рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \cdots + |a_n||x|^n + \cdots. \qquad (6)$$

Как мы знаем, если ряд (6) сходится, то будет сходиться и ряд (1) и при этом абсолютно. А для решения вопроса о сходимости ряда (6)

можно воспользоваться признаком Даламбера, т.к. этот ряд является рядом с положительными членами.

Пример 1. $\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n} + \cdots$.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x)^{n+1}n}{(n+1)(2x)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right||2x| = |2x|$.

Ряд сходится, если $|2x| < 1$, т.е. если $|x| < \frac{1}{2}$.

При $x = \frac{1}{2}$ ряд сходится, при $x = -\frac{1}{2}$ ряд расходится.

Итак, ряд сходится в полузамкнутом интервале $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$.

Пример 2. $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1$.

Так как предел не зависит от x и меньше единицы, то ряд сходится при всех значениях x.

Ряды по степеням $x - a$

Степенным рядом также называется функциональный ряд вида:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots, \qquad (1)$$

где постоянные $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ также называются коэффициентами ряда.

Для определения области сходимости ряда (1) произведем в нем замену переменного $x - a = X$. После этой замены ряд (1) примет вид

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots, \qquad (2)$$

т.е. получили знакомый нам степенной ряд, расположенный по степеням X. Пусть ряд (2) имеет интервал сходимости $-R < X < R$. Отсюда следует, что ряд (1) будет иметь интервал сходимости $a - R < x < a + R$.

Таким образом, изучение рядов (1) сводится к изучению рядов (2).

Ряды Тейлора и Маклорена

Мы с вами уже знаем, что для функции $f(x)$, имеющей все производные до $(n+1)$ *–го* порядка включительно в окрестности точки $x = a$ (т.е. на некотором интервале, содержащем точку $x = a$), справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad (1)$$

где $R_n(x)$ – остаточный член.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки $x = a$, то в формуле Тейлора число n можно брать сколь угодно большим. Допустим, что в рассматриваемой окрестности остаточный член $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, переходя в формуле (1) к пределу при $n \to \infty$, получим справа бесконечный ряд, который называется рядом Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots. \quad (2)$$

Эта формула справедлива лишь в том случае, если $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае написанный справа ряд сходится и его сумма равна данной функции $f(x)$.

Если в ряде Тейлора положим $a = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора – ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

Отметим, что для каждой из элементарных функций существует такое a и такое R, что в интервале $(a - R, a + R)$ она разлагается в ряд Тейлора или в ряд Маклорена.

Пример 1. $sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$

Так как остаточный член стремится к нулю при любом x, то данный ряд сходится и имеет в качестве суммы функцию $sinx$ при любом x.

Пример 2. $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$

При всех значениях x ряд сходится и представляет функцию $cosx$.

Пример 3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$

Так как $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для любого x, то для всех значений x ряд сходится и представляет функцию e^x.

Пример 4. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

Ряд сходится и представляет функцию $(1+x)^m$ для $x \in (-1,1)$.

Пример 5. $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$

Ряд сходится и представляет функцию $ln(1+x)$ для $x \in (-1,1]$.

V. Функции нескольких переменных

Лекция 23.

При изучении многих явлений приходится иметь дело с функциями двух, трех и более переменных. Приведем примеры.

Пример 1. Площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, выражается формулой: $S = xy$. Каждой паре значений x и y соответствует определенное значение площади S; S есть функция двух переменных.

Пример 2. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = xyz$ с измерениями x, y, z есть функция трех переменных.

Если каждой паре (x, y) значений двух, независимых друг от друга, переменных величин x и y, из некоторой области их изменения D, соответствует определенное значение величины z, то z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная в области D.

Символически функция двух переменных обозначается так $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ и т. д. Пару значений (x, y) называют часто точкой $M(x, y)$, а функцию двух переменных – функцией точки $z = f(M)$.

Функция двух переменных может быть задана, например, в виде таблицы с двумя входами или аналитически – с помощью формулы, как это было сделано в примерах.

Функция двух переменных существует, вообще говоря, не при любых значениях x и y.

Совокупность пар (x, y) значений x и y, при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется областью определения этой функции.

Область определения функции наглядно иллюстрируется геометрически. Если каждую пару значений x и y мы будем изображать точкой $M(x, y)$ в плоскости Oxy, то область определения функции изобразится в виде некоторого множества точек на плоскости. Это множество точек будем также называть областью определения функции. Областью определения может быть вся плоскость или часть плоскости, ограниченная линией. Линию, ограничивающую данную область, будем называть границей области. Точки области, не лежащие на границе, будем называть внутренними точками области. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется открытой или незамкнутой. Если же к области относятся и точки границы, то область называется замкнутой. Область называется ограниченной, если существует такое постоянное C, что расстояние любой точки M области от начала координат O меньше C, т.е. $OM < C$.

Примеры нахождения области определения функции.

1) $z = 2x - y$.

Аналитическое выражение $2x - y$ имеет смысл при любых значениях x и y. Следовательно, областью определения функции является вся плоскость Oxy.

2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

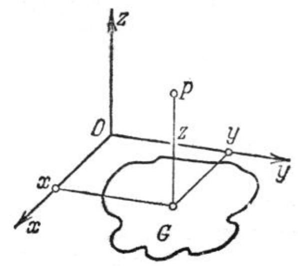
Для того, чтобы z имело действительное значение, нужно, чтобы под корнем стояло неотрицательное число, т.е. x и y должны удовлетворять неравенству: $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$. Областью определения функции является множество всех точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют указанному неравенству, т.е. лежат в круге радиуса 1 с центром в начале координат и на границе этого круга.

3) $z = ln(x + y)$.

Так как логарифмы определены только для положительных чисел, то должно удовлетворяться неравенство $x + y > 0$ или $y > -x$. Областью определения функции является полуплоскость, расположенная выше биссектрисы второй и четвертой четвертей, причем сама биссектриса не входит в нее.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трех и более переменных.

Геометрическое изображение функции двух переменных

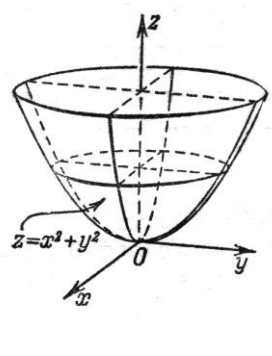


Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, $\quad (1)$

определенную в области G на плоскости Oxy (эта область может быть и всей плоскостью), и систему прямоугольных координат $Oxyz$. В каждой точке (x, y) восставим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нем отложим отрезок, равный $f(x, y)$. Тогда мы получим в пространстве точку P с координатами $x, y, z = f(x, y)$. Множество точек P, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), называется графиком функции двух переменных.

Из аналитической геометрии мы знаем, что уравнение (1) в пространстве определяет некоторую поверхность. Таким образом, графиком функции двух переменных является поверхность, проектирующаяся на плоскость Oxy в область определения функции.

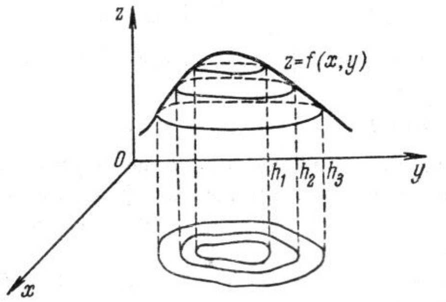
Пример. Графиком функции $z = x^2 + y^2$, как известно из аналитической геометрии, является параболоид вращения.



Геометрические изображения функций трех и большего числа переменных не имеют простого геометрического смысла.

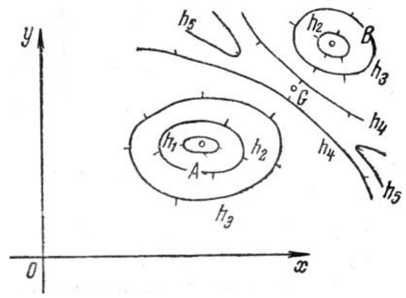
В некоторых случаях можно получить наглядное геометрическое представление о характере изменения функции, рассматривая ее линии уровня (или поверхности уровня), т.е. линии (или поверхности), где данная функция сохраняет постоянное значение.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для которых данная функция имеет одно и то же значение (изокривая). Таким образом, уравнение линии уровня есть $f(x, y) = C$, где $C -$ некоторая постоянная. Придавая z постоянные значения $h_1, h_2, h_3, \cdots$, мы получим в плоскости Oxy линии уровня $f(x, y) = h_1$, $f(x, y) = h_2, \cdots$. Геометрически они получаются, если пересекать поверхность $z = f(x, y)$ плоскостями, параллельными плоскости Oxy, и проектировать линии пересечения на эту плоскость.



Этот способ, в частности, широко применяется при черчении географических карт; там функцией служит высота над уровнем океана.

Полученная система линий уровня может иметь вид, например, изображенный на рисунке; маленькие черточки указывают направление убывания функции от линии уровня, для географической карты это – направление стока воды. Из рисунка видно, что рассматриваемый график имеет "вершины" в точках A и B (причем в A более высокую), в точке $G -$ перевал и т.п.

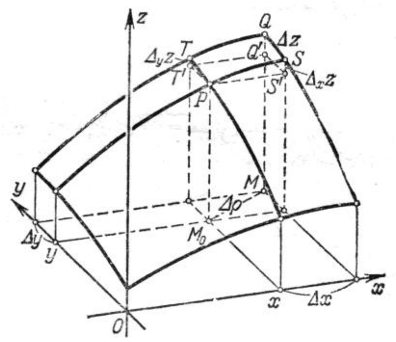


Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется множество всех точек пространства $Oxyz$, для которых данная функция имеет одно и то же значение (изоповерхность).

Линии и поверхности уровня постоянно встречаются в физических вопросах. Например, соединив на карте поверхности Земли точки с одинаковой средней суточной температурой или с одинаковым средним суточным давлением, получим соответственно изотермы и изобары, являющиеся важными исходными данными для прогноза погоды.

Частные и полное приращения функции нескольких переменных

Рассмотрим линию PS пересечения поверхности $z=f(x,y)$ с плоскостью $y=const$, параллельной плоскости Oxz.



Так как в этой плоскости y сохраняет постоянное значение, то z вдоль кривой PS будет меняться только в зависимости от изменения x. Дадим независимой переменной x приращение Δx; тогда z получит приращение, которое называют частным приращением z по x и обозначают через $\Delta_x z$, так что

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y). \qquad (1)$$

Аналогично, если x сохраняет постоянное значение, а y получает приращение Δy, то z получает приращение, называемое частным приращением z по y. Это приращение обозначают символом $\Delta_y z$:

$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y). \qquad (2)$$

Приращение $\Delta_y z$ функция получает вдоль линии пересечения поверхности $z=f(x,y)$ с плоскостью $x=const$, параллельной плоскости Oyz.

Наконец, сообщив аргументу x приращение Δx, а аргументу y – приращение Δy, получим для z новое приращение Δz, которое называется полным приращением функции z и определяется формулой:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y). \qquad (3)$$

Отметим, что, вообще говоря, полное приращение не равно сумме частных приращений.

Аналогичным образом определяются частные и полное приращения функции любого числа переменных. Так для функции трех переменных $u=f(x,y,t)$ имеем:

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x,y,t)-f(x,y,t),$$
$$\Delta_y u=f(x,y+\Delta y,t)-f(x,y,t),$$
$$\Delta_t u=f(x,y,t+\Delta t)-f(x,y,t),$$
$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y,t+\Delta t)-f(x,y,t).$$

Предел функции нескольких переменных

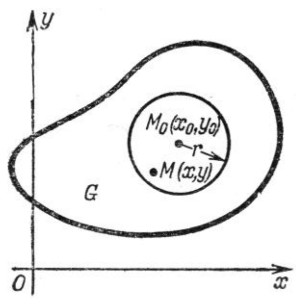
Будем в основном рассматривать функции двух переменных, так как рассмотрение трех и более переменных не вносит никаких принципиальных изменений, но вносит добавочные технические трудности.

Введем одно очень важное вспомогательное понятие – понятие окрестности данной точки.

Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется множество всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$, т.е. множество всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если мы будем говорить, что функция $f(x, y)$ обладает каким-либо свойством "вблизи точки (x_0, y_0)" или "в окрестности точки (x_0, y_0)", то под этим будем подразумевать, что найдется такой круг с центром в (x_0, y_0), во всех точках которого данная функция обладает указанным свойством.

Пусть дана функция $z=f(x, y)$, определенная в некоторой области G плоскости Oxy. Рассмотрим некоторую определенную точку $M_0(x_0, y_0)$, лежащую в области G.



Число A называется пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\forall\varepsilon>0\exists$ такое $r(\varepsilon)>0$, что для всех точек $M(x, y)$, для которых выполняется неравенство $MM_0<r$ имеет место неравенство $|f(x, y)-A|<\varepsilon$.

Если число A является пределом функции $f(x, y)$ при $M(x, y)\to M_0(x_0, y_0)$, то пишут:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A.$$

Функция $\alpha=\alpha(x, y)$ называется бесконечно малой при $M(x, y)\to M_0(x_0, y_0)$, если $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \alpha(x, y)=0$.

Как и для функции одной переменной, существует специальное представление функции двух переменных:

$$f(x, y)=A+\alpha(x, y),$$

где $A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$, $\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \alpha(x, y)=0$.

Рассуждая как и в случае функции одной переменной, можно доказать также теорему о пределе суммы, разности, произведения и частного функций нескольких переменных, аналогичную соответствующей теореме для функции одной переменной.

Лекция 24.

Непрерывность функции нескольких переменных

Функция $z=f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она

1) определена в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой ее окрестности,

2) существует предел $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$,

3) этот предел равен частному значению $f(x_0, y_0)$.

Условие непрерывности функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ символически может быть выражено так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \qquad (1)$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Если обозначим $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то равенство (1) можно переписать так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \qquad (1')$$

или $\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \qquad (1'')$

Обозначим $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ $\Delta \rho \to 0$, и обратно,

если $\Delta \rho \to 0$, то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Замечая далее, что выражение, стоящее в квадратных скобках в равенстве $(1'')$, есть полное приращение функции Δz, равенство $(1'')$ можно переписать в форме:

$$\lim_{\Delta \rho \to 0} \Delta z = 0. \qquad (1''')$$

Это условие непрерывности функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в разностной форме.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в области.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в замкнутой области, то она ограничена и достигает своего наименьшего и наибольшего значений (без доказательства).

Если в некоторой точке $N_0(x_0, y_0)$ не выполняется хотя бы одно из трех условий непрерывности функции в точке, то точка $N_0(x_0, y_0)$ называется точкой разрыва функции $z = f(x, y)$.

Функция двух переменных может иметь не только точки разрыва, но и линии разрыва. Например, для функции $z = \frac{1}{y - x^2}$ любая точка параболы $y = x^2$ является точкой разрыва. Говорят, что данная функция имеет линию разрыва.

Аналогично, говорят, что функция трех переменных $u = \frac{1}{z - x^2 - y^2}$ имеет поверхность разрыва – параболоид вращения $z = x^2 + y^2$.

Частные производные функции нескольких переменных

Частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Частная производная по x от функции $z = f(x, y)$ обозначается одним из символов: $z'_x, f'_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$.

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично частная производная по y от функции $z = f(x, y)$ определяется как предел отношения частного приращения функции $\Delta_y z$ к приращению Δy при стремлении Δy к нулю. Частная производная по y обозначается одним из символов: $z'_y, f'_y(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y, а $\Delta_y z$ при неизменном x, мы можем определения частных производных сформулировать по-другому.

Частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется производная по x, вычисленная в предположении, что y – постоянная.

Частной производной по y от функции $z = f(x, y)$ называется производная по y, вычисленная в предположении, что x – постоянная.

Из этого определения ясно, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, указанными для функций одного переменного, и только требуется каждый раз помнить, по какому переменному ищется производная.

Пример 1. $z = x^2 siny$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xsiny, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 cosy.$$

Пример 2. $z = x^y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y lnx.$$

Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично.

Пример 3. $u = x^2 + y^2 + xtz^3$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3.$$

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных $z = f(x, y)$ состоит в следующем (смотрите соответствующий рисунок в предыдущей лекции):

$\frac{\partial z}{\partial x} = tg\alpha$, где $\alpha -$ угол между осью Ox и касательной в точке P к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = const$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = tg\beta$, где $\beta -$ угол между осью Oy и касательной в точке P к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $x = const$.

Полный дифференциал функции двух переменных

По определению полного приращения функции $z = f(x, y)$ имеем:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (1)$$

Предположим, что $f(x, y)$ в рассматриваемой точке (x, y) имеет непрерывные частные производные. Выразим Δz через частные производные. Для этого в правой части равенства (1) прибавим и вычтем $f(x, y + \Delta y)$:

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \quad (2)$$

Выражение, стоящее в первой квадратной скобке равенства (2), можно рассматривать как разность двух значений функции одного переменного x (второй аргумент сохраняет одно и то же значение $y + \Delta y$). Применяя к этой разности теорему Лагранжа, получим:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x, \qquad (3)$$

где $\bar{x}$ заключено между x и $x + \Delta x$.

Выражение, стоящее во второй квадратной скобке равенства (2), можно рассматривать как разность двух значений функции одного переменного y (значение x остается постоянным). Применяя к этой разности теорему Лагранжа, получим:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \Delta y, \qquad (4)$$

где $\bar{y}$ заключено между y и $y + \Delta y$.

Внося выражения (3) и (4) в равенство (2), получим:

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \Delta y. \qquad (5)$$

Так как, по предположению, частные производные непрерывны, то

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{cases} \qquad (6)$$

(так как $\bar{x}$ и $\bar{y}$ заключены, соответственно, между x и $x + \Delta x$, y и $y + \Delta y$,

то при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ $\bar{x}$ и $\bar{y}$ стремятся, соответственно, к x и y).

Равенства (6) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \gamma_1, \\ \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \gamma_2, \end{cases} \qquad (6')$$

где величины γ_1 и γ_2 стремятся к нулю, когда Δx и Δy стремятся к нулю (т.е. когда $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$).

В силу равенств $(6')$ соотношение (5) принимает вид:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y. \qquad (5')$$

Сумма двух последних слагаемых правой части является бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Действительно, отношение $\frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta \rho} \to 0$ при $\Delta \rho \to 0$, т.к. γ_1 является бесконечно малой величиной, а $\frac{\Delta x}{\Delta \rho}$ – ограниченной $\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta \rho}\right| \le 1\right)$. Аналогично проверяется, что $\frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta \rho} \to 0$ при $\Delta \rho \to 0$.

Сумма первых двух слагаемых есть выражение линейное относительно Δx и Δy. При $f'_x(x,y) \ne 0$ и $f'_y(x,y) \ne 0$ это выражение представляет собой главную часть приращения, отличаясь от Δz на бесконечно малую высшего порядка относительно $\Delta \rho$.

Функция $z = f(x,y)$, полное приращение Δz которой в данной точке (x,y) может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно Δx и Δy, и величины бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta \rho$, называется дифференцируемой в данной точке, а линейная часть приращения называется полным дифференциалом и обозначается через dz или df.

Из равенства $(5')$ следует, что если функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет полный дифференциал

$$dz = f'_x(x,y) \Delta x + f'_y(x,y) \Delta y.$$

Равенство $(5')$ можно переписать в виде:

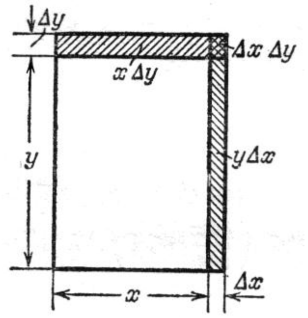
$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

и с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta \rho$ можно написать следующее приближенное равенство: $\Delta z \approx dz$.

Приращения независимых переменных Δx и Δy мы будем называть дифференциалами независимых переменных x и y и обозначать, соответственно, через dx и dy. Тогда выражение полного дифференциала примет вид:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Таким образом, если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то она дифференцируема в точке (x, y), и ее полный дифференциал равен сумме произведений частных производных на дифференциалы соответствующих независимых переменных.



Пример. Найти полный дифференциал и полное приращение функции $z = xy$ в точке $(2{,}3)$ при $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y \Delta x + x \Delta y + \Delta x \Delta y,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = y \Delta x + x \Delta y.$$

Следовательно, $\Delta z = 3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}72$,

$dz = 3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}7$.

На рисунке дана иллюстрация к этому примеру.

Предыдущие рассуждения и определения соответственным образом обобщаются на функции любого числа аргументов.

Лекция 25.

Частные производные, полная производная и полный дифференциал сложной функции нескольких переменных

Предположим, что в уравнении $z = F(u, v)$ (1)

u и v являются функциями независимых переменных x и y:

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y). \qquad (2)$$

В этом случае z есть сложная функция от аргументов x и y.

Конечно, z можно выразить и непосредственно через x и y, а именно:

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)]. \qquad (3)$$

Предположим, что функции $F(u, v), \varphi(x, y), \psi(x, y)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам и поставим задачу: вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, исходя из уравнений (1) и (2) и не пользуясь уравнением (3).

Дадим аргументу x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда, в силу уравнений (2), u и v получат приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$. Но если u и v получают приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, то и функция $z = F(u, v)$ получит приращение $\Delta_x z$, определяемое формулой:

$$\Delta_x z = \frac{\partial F}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v,$$

где γ_1 и γ_2 $\to 0$ при $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$ $\to 0$.

Разделим все члены этого равенства на Δx:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$ (в силу непрерывности функций u и v). Но тогда γ_1 и γ_2 тоже стремятся к нулю. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (4)$$

Если бы мы дали приращение Δy переменному y, а x оставили неизменным, то с помощью аналогичных рассуждений нашли бы:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (4')$$

Для случая большего числа переменных формулы (4) и $(4')$ естественным образом обобщаются. Например, если $w = F(z, u, v, s)$ есть функция четырех аргументов z, u, v, s, а каждый из них зависит от x и y, то формулы (4) и $(4')$ принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}. \end{cases} \qquad (5)$$

Если задана функция $z = F(x, y, u, v)$, где y, u, v в свою очередь зависят от одного аргумента x: $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, то, по сути дела, z является функцией только одного переменного x и можно ставить вопрос о нахождении производной $\frac{dz}{dx}$. Эта производная вычисляется по первой из формул (5):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

но так как y, u, v —функции только одного аргумента x, то частные производные обращабтся в обыкновенные, кроме того, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, поэтому

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Эта формула носит название формулы для вычисления полной производной $\frac{dz}{dx}$ (в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$).

Найдем далее полный дифференциал сложной функции, определенной равенствами (1) и (2). Подставим выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, определенные равенствами (4) и $(4')$, в формулу полного дифференциала:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (6)$$

Получаем:

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

Произведем следующие преобразования в правой части:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right). \qquad (7)$$

Но $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du, \\ \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = dv. \end{cases}$ $\qquad (8)$

Равенство (7) с учетом равенств (8) можно переписать так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \qquad (9)$$

Сравнивая (6) и (9), можем сказать, что выражение полного дифференциала функции нескольких переменных (дифференциала первого порядка) имеет тот же вид, т.е. форма дифференциала первого порядка инвариантна, являются ли u и v независимыми переменными или функциями независимых переменных.

Производные от неявных функций

Начнем с неявной функции одного переменного. Мы уже решали задачу о дифференцировании неявной функции одного переменного, но были рассмотрены лишь отдельные примеры. Сейчас же мы получим общую формулу, дающую производную от неявной функции одного переменного, и выясним условия существования этой производной.

Теорема. Пусть непрерывная неявная функция y от x задается уравнением: $F(x, y) = 0, \qquad (1)$

где $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ – непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку (x, y), координаты которой удовлетворяют уравнению (1), кроме того, в этой точке $F'_y(x, y) \neq 0$. Тогда функция y от x имеет производную:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть некоторому значению x соответствует значение функции y. При этом $F(x, y) = 0$. Дадим независимому переменному x приращение Δx. Функция y получит приращение Δy, т.е. значению аргумента $x + \Delta x$ соответствует значение функции $y + \Delta y$. В силу уравнения $F(x, y) = 0$ будем иметь: $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$.

Следовательно, $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$.

Левую часть последнего равенства, являющуюся полным приращением функции двух переменных, можно переписать так:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

где γ_1 и $\gamma_2 \to 0$ при Δx и $\Delta y \to 0$.

Так как левая часть равна нулю, можно написать:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0.$$

Разделим на Δx и вычислим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma_2}.$$

Устремим Δx к нулю. Тогда, учитывая, что при этом γ_1 и γ_2 также стремятся к нулю и что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, в пределе получим:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Пример. Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет y как неявную функцию от x. Здесь $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$.

Следовательно, $y'_x = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$.

Рассмотрим теперь уравнение вида:

$$F(x,y,z) = 0. \qquad (3)$$

Если паре чисел (x,y) из некоторой области соответствует одно или несколько значений z, удовлетворяющих уравнению (3), то это уравнение неявно определяет одну или несколько однозначных функций z от x и y.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z от x и y, определяемой уравнением (3). Когда мы ищем $\frac{\partial z}{\partial x}$, мы считаем y постоянным, поэтому здесь применима формула (2), если только независимым переменным считать x, а функцией z.

Следовательно, $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$. Аналогично $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$.

Предполагается, что $F'_z \neq 0$.

Аналогичным образом определяются неявные функции любого числа переменных и находятся их частные производные.

Частные производные различных порядков

Пусть имеем функцию двух переменных: $z = f(x,y)$.

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$, вообще говоря, являются функциями переменных x и y. Поэтому от них можно снова находить частные производные, которые называются производными второго порядка или вторыми производными. Их четыре:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. Получим частные производные третьего порядка, которых будет уже восемь. Вообще, частная производная $n-го$ порядка есть первая производная от производной $(n-1)-го$ порядка.

Для функции любого числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

Естественно поставить вопрос, зависит ли результат дифференцирования функции нескольких переменных от порядка дифференцирования по разным переменным, т.е. будут ли, например, тождественно равны производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Ответ дает следующая теорема.

Теорема. Если функция $z = f(x,y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} определены и непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой ее окрестности, то в этой точке $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим выражение:

$$A = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

Если введем вспомогательную функцию $\varphi(x)$, определенную равенством: $\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$, то A можно записать в виде: $A = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$.

Так как, по предположению, f'_x определена в окрестности точки (x_0, y_0), то, следовательно, $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$; но тогда, применяя теорему Лагранжа, получим:

$$A = \Delta x \varphi'(\bar{x}), \text{ где } x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x.$$

$$\text{Но } \varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y_0 + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y_0).$$

Так как f''_{xy} определена в окрестности точки (x_0, y_0), применим к полученной разности вновь теорему Лагранжа (по переменному y):

$$f'_x(\bar{x}, y_0 + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y_0) = \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}), \text{ где } y_0 < \bar{y} < y_0 + \Delta y.$$

$$\text{Следовательно, } A = \Delta x \, \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \qquad (1)$$

Переставив средние слагаемые в первоначальном выражении для A, получим: $A =$

$$[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] - [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)].$$

Введем вспомогательную функцию: $\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$, тогда $A = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0)$.

Применяя снова теорему Лагранжа, получим:

$$A = \Delta y \psi'(\bar{\bar{y}}), \text{ где } y_0 < \bar{\bar{y}} < y_0 + \Delta y.$$

Но $\psi'(\bar{\bar{y}}) = f'_y(x_0 + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y(x_0, \bar{\bar{y}})$.

Применив еще раз теорему Лагранжа, получим:

$$f'_y(x_0 + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y(x_0, \bar{\bar{y}}) = \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}), \text{ где } x_0 < \bar{\bar{x}} < x_0 + \Delta x.$$

$$\text{Таким образом, } A = \Delta y \, \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}). \qquad (2)$$

Левые части равенств (1) и (2) равны, следовательно, равны и правые, т.е. $\Delta x \Delta y f''_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = \Delta y \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})$,

откуда $f''_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})$.

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, получим:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}).$$

Так как производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в точке (x_0,y_0), то $\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f''_{xy}(x_0,y_0)$ и $\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Окончательно, $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы как следствие получается, что если частные производные $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ и $\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$ непрерывны, то они равны.

Аналогичная теорема имеет место и для функции любого числа переменных.

Лекция 26.

Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных

Полный дифференциал du функции от нескольких переменных есть в свою очередь функция тех же переменных, и мы можем определить полный дифференциал этой последней функции. Таким образом мы получим дифференциал второго порядка d^2u первоначальной функции u, который также будет функцией тех же переменных, а его полный дифференциал приведет нас к дифференциалу третьего порядка d^3u первоначальной функции и т.д.

Рассмотрим подробнее случай функции $z = f(x,y)$ двух переменных и будем предполагать, что переменные x и y являются независимыми переменными.

По определению: $dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$.

При вычислении d^2z будем принимать во внимание, что дифференциалы dx и dy независимых переменных надо рассматривать как величины постоянные, а потому их можно выносить за знак дифференциала.

$$d^2z = d\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx\right] + d\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right] = dx \cdot d\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + dy \cdot d\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} =$$

$$dx \cdot \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dy\right] + dy \cdot \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy\right] =$$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2.$

Вычисляя точно так же d^3z, мы получим:

$d^3z = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}dy^3.$

Эти выражения d^2z и d^3z приводят нас к следующей символической формуле для дифференциала любого порядка:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f, \qquad (1)$$

причем формулу эту надо понимать так: сумму, стоящую в круглых скобках, надо возвысить в степень n, применяя формулу бинома Ньютона, после чего показатели степеней у $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ надо считать указателями порядка производных по x и y от функции f.

Формула (1) обобщается без труда и на случай функции любого числа независимых переменных.

В приведенных выше рассуждениях мы предполагали, что значения дифференциалов dx и dy постоянны. Это предположение может быть выполнено в случае, когда аргументы x и y функции $z = f(x,y)$ являются независимыми переменными. Если же аргументы x и y представляют собой дифференцируемые функции каких-либо других переменных, то выражение дифференциала $d^n z$ при $n \geq 2$ отличается, вообще говоря, от его выражения в форме (1). Убедимся в этом на примере дифференциала второго порядка для функции $z = f(x,y)$. Пусть например, $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$. В силу инвариантности формы первого дифференциала имеем:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy.$$

Найдем d^2z в этом общем случае.

При вычислении $d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx\right)$ и $d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right)$ мы уже не имеем права выносить dx и dy за знак дифференциала, как это делали выше, но должны применять формулу для дифференциала произведения. Мы получим , таким образом,

$$d^2z = dx \cdot d\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + dy \cdot d\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}d^2y.$$

Сумма первых двух слагаемых в правой части этого равенства даст нам выражение, которое мы имели выше для d^2z, и окончательно получим:

$d^2z = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{d^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2 +$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}d^2y,$$

то есть в рассматриваемом общем случае выражение для d^2z будет содержать добавочные слагаемые, зависящие от d^2x и d^2y.

Экстремумы функции нескольких переменных

Функция $z=f(x,y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, если $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ для всех точек (x,y), достаточно близких к точке (x_0,y_0) и отличных от нее.

Функция $z=f(x,y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, если $f(x_0,y_0)<f(x,y)$ для всех точек (x,y), достаточно близких к точке (x_0,y_0) и отличных от нее.

Из этих определений следует, что максимум и минимум функции нескольких переменных может достигаться лишь во внутренних точках области ее определения. Максимум и минимум функции называются экстремумами функции, т.е. говорят, что функция имеет экстремум в данной точке, если эта функция имеет максимум или минимум в данной точке.

Пример. Функция $z=x^2+y^2$ достигает минимума в точке $(0{,}0)$. Действительно, $f(0{,}0)=0$, а так как $x^2+y^2>0$ при $x\neq 0, y\neq 0$, то $f(x,y)>f(0{,}0)$.

Теорема 1 (о необходимых условиях экстремума).

Если функция $z=f(x,y)$ достигает экстремума при $x=x_0, y=y_0$, то каждая частная производная первого порядка от z или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или не существует.

Доказательство. Действительно, дадим переменному y определенное значение, именно $y=y_0$. Тогда функция $f(x,y_0)$ будет функцией одного переменного x. Так как при $x=x_0$ она имеет экстремум, то , следовательно, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ или равно нулю, или не существует. Совершенно аналогично можно доказать, что $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ или равно нулю, или не существует. Что и требовалось доказать.

Эта теорема не является достаточной для исследования вопроса об экстремальных значениях функции.

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ (или не существует) и $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (или не существует), называются критическими точками функции $z=f(x,y)$.

Если функция достигает экстремума в какой-либо точке, то (в силу теоремы 1) это может случиться только в критической точке.

Для исследования функции в критических точках существуют достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Теорема 2 (о достаточных условиях экстремума).

Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно; пусть, кроме того, точка $M_0(x_0, y_0)$ является критической точкой функции $f(x, y)$, т.е.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0.$$

Тогда достаточные условия экстремума для функции $z = f(x, y)$ выражаются с помощью определителя $\Delta = \begin{vmatrix} AB \\ BC \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2$, где

$A = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$, а именно:

1) если $\Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ —точка экстремума:
   при $A < 0$ —точка максимума,
   при $A > 0$ —точка минимума,
2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ нет экстремума,
3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть и может не быть (в этом случае требуется дальнейшее исследование функции, например, по знаку приращения функции вблизи этой точки).

Эту теорему примем без доказательства.

Свойства функции нескольких переменных, непрерывной в замкнутой и ограниченной области

Свойство 1. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в области D найдется по крайней мере одна точка $N_0(x_0, y_0)$ такая, что для всех других точек области будет выполняться соотношение $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$, и по крайней мере одна точка $\overline{N}(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что для всех других точек области будет выполняться соотношение $f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(x, y)$.

Значение функции $f(x_0, y_0) = M$ будем называть наибольшим значением функции $f(x, y)$ в области D, а значение $f(\bar{x}, \bar{y}) = m$ — наименьшим значением.

Свойство 2. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D и если M и m —наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y)$ в области, то для любого числа μ, удовлетворяющего условию $m < \mu < M$, найдется в области такая точка $N^*(x^*, y^*)$, что будет выполняться равенство $f(x^*, y^*) = \mu$.

Следствие свойства 2. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области и принимает как положительные, так и отрицательные значения, то внутри области найдется по крайней мере одна точка, в которой функция $f(x,y)$ обращается в нуль.

Лекция 27.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений

Теорема. Функция нескольких переменных, непрерывная в ограниченной и замкнутой области, достигает в этой области своего наименьшего и наибольшего значений либо в критических точках функции, принадлежащих этой области, либо в граничных точках области. (Без доказательства).

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой ограниченной области необходимо:

1. Найти критические точки (лежащие внутри данной области) и вычислить в них значения функции. При этом нет необходимости исследовать функцию на экстремум с помощью частных производных второго порядка.
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области. Для функции $z=f(x,y)$ граница состоит из нескольких дуг или отрезков, уравнения которых $y=f_1(x)$, где $a \le x \le b$ или $x=\varphi_1(y)$, где $c \le y \le d$, поэтому на соответствующих дугах или отрезках границы данная функция является функцией одной переменной: $z=f[x,f_1(x)]=z(x)$ или $z=f[\varphi_1(y),y]=z(y)$.

Если граница задана параметрическими уравнениями:

$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ \ (\alpha \le t \le \beta)$, то данная функция также превращается в функцию одной переменной:

$z=f(x,y)=f[\varphi(t),\psi(t)]=z(t)$.

Итак, нахождение наибольшего и наименьшего значений на границе области для функции двух переменных сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на отрезке.

3. Сравнить все значения функции: самое большое будет наибольшим значением функции в данной области, самое маленькое – наименьшим.

Условные экстремумы функции нескольких переменных

До сих пор мы рассматривали максимумы и минимумы функции нескольких переменных, предполагая, что те переменные, от которых функция зависит, являются независимыми переменными. В подобных случаях экстремумы называются абсолютными.

Но бывают также и такие задачи, когда переменные, от которых зависит функция, связаны некоторыми соотношениями. В подобных случаях экстремумы называются условными (или относительными).

Задачи об отыскании условных экстремумов можно решать двумя способами.

Первый способ.

Задачи об отыскании условных экстремумов можно решать путем сведения их к задачам об отыскании абсолютных экстремумов функций, зависящих от меньшего числа переменных.

Суть этого метода на примере функции двух переменных, связанных одним условием, состоит в следующем.

Пусть требуется найти условные экстремумы функции $z = f(x, y) \quad (1)$

При условии, что x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0. \qquad (2)$

При наличии условия (2) из двух переменных x и y независимыми будет только одно, например x, так как y определяется из равенства (2) как функция от x. Разрешив уравнение (2) относительно y и вставив в равенство (1) вместо y найденное выражение, мы получим функцию одного переменного x, которую надо исследовать на абсолютный экстремум.

Этот метод можно применять и при исследовании на условные экстремумы функции f от большего числа переменных, например n, связанных несколькими уравнениями, например m $(m < n)$. Разрешая систему m уравнений относительно каких-либо m переменных и подставляя эти выражения в функцию f, получим функцию от $(n - m)$ независимых переменных и придем к задаче отыскания абсолютных экстремумов функции, зависящей от $(n - m)$ переменных.

Но такое разрешение системы m уравнений часто бывает практически затруднительным и даже невыполнимым, поэтому был разработан другой метод решения этой задачи, который мы сейчас и рассмотрим

Второй способ (метод множителей Лагранжа).

Пусть требуется найти условные экстремумы функции

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

при условии, что x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \qquad (2)$$

Будем решать теперь эту задачу, не разрешая уравнения (2) относительно x или y.

При тех значениях x, при которых функция z может иметь экстремум, производная от z по x должна обращаться в нуль. Из (1) находим $\frac{dz}{dx}$, помня, что y есть функция от x:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, в точках экстремума:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (3)$$

Из (2) находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (4)$$

Это равенство удовлетворяется для всех x и y, удовлетворяющих уравнению (2).

Умножив члены равенства (4) на неопределенный пока коэффициент λ и сложив их с соответствующими членами равенства (3), получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

или $$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (5)$$

Последнее равенство выполняется во всех точках экстремума. Подберем λ так, чтобы для значений x и y, соответствующих экстремуму функции z, вторая скобка в равенстве (5) обращалась в нуль (для определенности будем предполагать, что в критических точках $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$):
$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$

Но тогда при этих значениях x и y из равенства (5) следует равенство $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$

Таким образом, получается, что в точках экстремума удовлетворяются три уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

с тремя неизвестными x, y, λ. Из этих уравнений определяем x, y и λ, которое играло только вспомогательную роль и нам в дальнейшем не требуется.

Из вывода следует, что уравнения (6) являются необходимыми условиями условного экстремума, т.е. в точках экстремума удовлетворяются уравнения (6). Но не при всяких x и y (и λ), удовлетворяющих уравнениям (6), будет иметь место условный экстремум. Требуется дополнительное исследование характера критической точки. При решении конкретных задач иногда удается установить характер критической точки на основании существа задачи.

Заметим, что левые части уравнений (6) есть частные производные функции $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \qquad (7)$

по переменным x, y, λ.

Таким образом, для того чтобы найти значения x и y, удовлетворяющие условию (2), при которых функция $z = f(x, y)$ может иметь условный максимум или условный минимум, нужно составить вспомогательную функцию (7), приравнять нулю ее производные по x, y и λ и из полученных трех уравнений (6) определить искомые x, y и вспомогательный множитель λ.

Рассмотренный метод распространяется на исследование условного экстремума функции n переменных $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ при условии, что переменные $x_1, x_2, \cdots, x_n$ связаны m $(m < n)$ уравнениями:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Составляем вспомогательную функцию:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

Приравниваем нулю ее частные производные по $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

и из $m + n$ уравнений (8) и (9) определяем $x_1, x_2, \cdots, x_n$ и вспомогательные неизвестные $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$.

Так же как и для функции двух переменных, вопрос о том, будет ли при найденных значениях функция иметь условный экстремум или не будет иметь его, в общем случае остается открытым. Этот вопрос решается на основании вспомогательных соображений.

Пример. На плоскости $3x - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от точек $A(1,1,1)$ и $B(2,3,4)$ была бы наименьшей.

Пусть $M(x, y, z)$ —искомая точка. Будем исследовать на экстремум функцию:

$$u = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2$$

при условии: $3x - 2z = 0$.

Составляем вспомогательную функцию:

$$F(x, y, z, \lambda) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 +$$
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 + \lambda(3x - 2z).$$

Приравнивая нулю частные производные, получаем систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 2(x-1) + 2(x-2) + 3\lambda = 0, \\ 2(y-1) + 2(y-3) = 0, \\ 2(z-1) + 2(z-4) - 2\lambda = 0, \\ 3x - 2z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим единственную критическую точку $\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$. Так как из геометрического смысла задачи следует, что наша функция должна иметь минимум, поэтому полученная критическая точка является точкой минимума.

VI. Рекомендуемая литература

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1976. – Т.1.

2. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 2001.

3. *Гусак А.А.* Высшая математика / А.А. Гусак. – Минск: Изд-во БГУ, 1976. – Т.1.

4. Гусак А.А. Высшая математика / А.А. Гусак. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – Т.2.

Содержание